

Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = y^3 + y^2 - 6xy + 9x^2 - 3x^3.$$

Řešení: K nalezení k lokálních funkce $f(x, y)$ je potřeba spočítat její první parciální derivace, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -9x^2 + 18x - 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 3y^2 + 2y.$$

V dalším kroku hledáme body v nichž jsou obě tyto derivace rovny nule, řešíme proto soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -9x^2 + 18x - 6y &= 0 \\ -6x + 3y^2 + 2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -3x^2 + 6x - 2y &= 0 \\ -6x + 3y^2 + 2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 6x - 2y &= 3x^2 \\ 3y^2 &= 6x - 2y \end{aligned}$$

Z posledního tvaru soustavy vidíme, že musí platit $x^2 = y^2$. To nastane, když bude $x = y$ nebo $x = -y$. Dosaďme do první z rovnic nejprve $x = y$

$$-9x^2 + 18x - 6y = 0 \Rightarrow -9x^2 + 18x - 6x = 0 \Rightarrow -9x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(4 - 3x) = 0.$$

Odsud již snadno určíme řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{4}{3}$. Protože jsme vyšli ze vztahu $x = y$, dostáváme body $\mathbf{A}_1 = [0, 0]$ a $\mathbf{A}_2 = [\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$.

Stejně tak dosaďme $x = -y$

$$-9x^2 + 18x - 6y = 0 \Rightarrow -9x^2 + 18x + 6x = 0 \Rightarrow -9x^2 + 24x = 0 \Rightarrow 3x(8 - 3x) = 0.$$

Opět snadno dopočítáme řešení $x_3 = \frac{8}{3}$.¹ A poznamenejme si další bod $\mathbf{A}_3 = [\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}]$.

Body $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ a $\mathbf{A}_3$ jsou „podezřelé,“ může v nich nastat extrém. Abychom zjistili, zda tomu tak opravdu je, musíme znovu derivovat.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18 - 18x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2.$$

Z druhých derivací sestavíme matici, resp. determinant, který v jednotlivých „podezřelých“ bodech vyhodnotíme.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 18 - 18x & -6 \\ -6 & 6y + 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_1 : \begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ \mathbf{A}_2 : \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} &= -96, \\ \mathbf{A}_3 : \begin{vmatrix} -30 & -6 \\ -6 & -14 \end{vmatrix} &= 384. \end{aligned}$$

¹Řešení $x_1 = 0$ již známe.

Takto spočtené determinanty nám říkají, že

- v bodě $\mathbf{A}_3$ má funkce lokální extrém, a to maximum. Determinant matice $\mathbf{A}_3$ je totiž kladný a $(\mathbf{A})_{1,1} = -30$ je záporný.
- v bodě $\mathbf{A}_2$ funkce lokální extrém nemá, protože determinant matice $\mathbf{A}_3$ je záporný.
- podle tohoto nemůžeme rozhodnout, zda zde extrém nastává či nikoliv, protože determinant je roven nule. Rozhodnout lze např. „analýzou“ chování funkce v okolí „podezřelého“ bodu $\mathbf{A}_1$. Funkci lze psát ve tvaru $f(x, y) = (3x - y)^2 + (y^3 - 3x^3)$, z něž je vidět, že budeme-li se kolem $\mathbf{A}_1$ pohybovat po přímce $y = 3x$, pak máme $f(x, y) = f(x, 3x) = 24x^3$. Ovšem $24x^3$ je záporné pro $x < 0$ a kladné pro $x > 0$, proto v bodě $\mathbf{A}_1$ extrém nenastává.

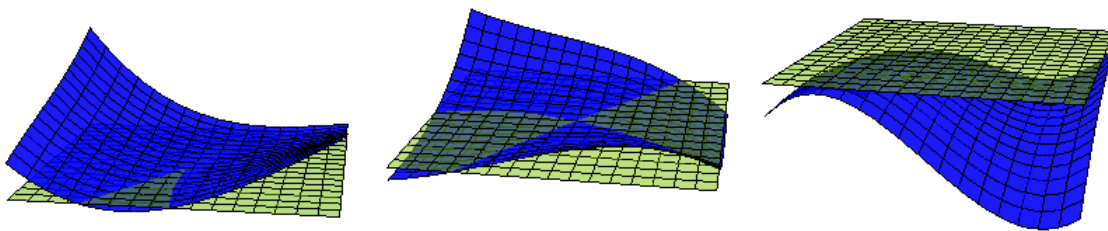
Připomeňme si zde ještě vzorec pro výpočet tečné roviny τ k funkci $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{T} = [T_x, T_y]$

$$\tau : \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T})(x - T_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T})(y - T_y) - z + f(\mathbf{T}) = 0,$$

a uvažujme, jak vypadají tečné roviny v „podezřelých“ bodech. Protože první parciální derivace jsou v nich nulové, mají tyto roviny tvar

$$-z + f(\mathbf{A}_i) = 0, \text{ pro } i = 1, 2, 3.$$

Jde tedy o roviny rovnoběžné s rovinou $z = 0$. V případě maxima v bodě $\mathbf{A}$ musí graf funkce „v okolí“ tohoto bodu zůstat pod tečnou rovinou. V případě minima nad tečnou rovinou. Pokud v bodě extrém není, pak je graf funkce v okolí bodu nad i pod tečnou. Na obr. 1 je znázorněna situace v jednotlivých bodech $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ a $\mathbf{A}_3$.



Obrázek 1: Tečná rovina a graf fce $f(x, y)$ v bodech $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ a $\mathbf{A}_3$

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x, y)$.

(1) $f(x, y) = -2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}.$

(2) $f(x, y) = 2xy + x^3y - x^2y^3.$

(3) $f(x, y) = 2 + x + \frac{x^3}{3} + y - xy.$

(4) $f(x, y) = x^2y^2 + \frac{x^2}{2} + y^3 - 3y + 3.$

(5) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3.$

(6) $f(x, y) = (2 - y)^2 + x^2y.$

(7) $f(x, y) = 125 - x^3 + 6xy - 8y^3.$

(8) $f(x, y) = xy^2 - y^3 + 3 \ln x.$

(9) $f(x, y) = 3 - x + x^2 - y - xy + y^2.$

(10) $f(x, y) = -6x + x^2 - 9y + xy + y^2.$

(11) $f(x, y) = 7 + x - 2x^2 - 3y + 6xy - 5y^2.$

(12) $f(x, y) = 5 + 2x + x^2 + 6y - y^2.$

(13) $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$

(14) $f(x, y) = 5 - 24x + 2x^3 + 2xy^2.$

(15) $f(x, y) = 5 + x^3 - 6xy + 8y^3.$

$$(16) \quad f(x, y) = 3 + 6x - x^2 + x\sqrt{y} - y.$$

$$(17) \quad f(x, y) = 15 + x^3 - 18xy + y^3.$$

$$(18) \quad f(x, y) = \ln x^3 + \ln(12 - x - y) + 2 \ln y.$$

$$(19) \quad f(x, y) = e^{2x}(x + 2y + y^2).$$

$$(20) \quad f(x, y) = 5x^2 + 2x^3 + y^2 + xy^2.$$

$$(21) \quad f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

$$(22) \quad f(x, y) = 3x - x^2 + 6y - xy + y^2.$$

$$(23) \quad f(x, y) = 5 + 32x + 2x^3y - x^2y^2.$$

$$(24) \quad f(x, y) = 12 - 8x + 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y.$$

$$(25) \quad f(x, y) = (1 + x^2)^2 - xy + y^2.$$

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x, y)$.

$$(1) \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE, \quad \mathbf{A}_2 = [2, 0] : NE, \quad \mathbf{A}_3 = [1, -1] : MAX, \quad \mathbf{A}_4 = [1, 1] : min.$$

$$(2) \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE.$$

$$(3) \mathbf{A}_1 = [1, 2] : NE.$$

$$(4) \mathbf{A}_1 = [0, -1] : NE, \mathbf{A}_2 = [0, 1] : min.$$

$$(5) \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE, \mathbf{A}_2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] : min.$$

$$(6) \mathbf{A}_1 = [-2, 0] : NE, \mathbf{A}_2 = [2, 0] : NE, \mathbf{A}_3 = [0, 2] : min.$$

$$(7) \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE, \mathbf{A}_2 = \left[1, \frac{1}{2} \right] : MAX.$$

$$(8) \mathbf{A}_1 = \left[-\frac{3}{2^{2/3}}, -\sqrt[3]{2} \right] \notin \mathcal{D}(f).$$

$$(9) \mathbf{A}_1 = [1, 1] : min.$$

$$(10) \mathbf{A}_1 = [1, 4] : min.$$

$$(11) \mathbf{A}_1 = \left[-2, -\frac{3}{2} \right] : MAX.$$

$$(12) \mathbf{A}_1 = [-1, 3] : NE.$$

$$(13) \mathbf{A}_1 = [-2, 0] : min.$$

$$(14) \mathbf{A}_1 = [-2, 0] : MAX, \mathbf{A}_2 = [2, 0] : min, \mathbf{A}_3 = [0, -2\sqrt{3}] : NE, \mathbf{A}_4 = [0, 2\sqrt{3}] : NE.$$

$$(15) \quad \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE, \quad \mathbf{A}_2 = \left[1, \frac{1}{2}\right] : min.$$

$$(16) \quad \mathbf{A}_1 = [4, 4] : MAX.$$

$$(17) \quad \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE, \quad \mathbf{A}_2 = [6, 6] : min.$$

$$(18) \quad \mathbf{A}_1 = [6, 4] : MAX.$$

$$(19) \quad \mathbf{A}_1 = \left[\frac{1}{2}, -1\right] : min.$$

$$(20) \quad \mathbf{A}_1 = \left[-\frac{5}{3}, 0\right] : MAX, \quad \mathbf{A}_2 = [0, 0] : min, \quad \mathbf{A}_3 = [-1, -2] : ne, \quad \mathbf{A}_4 = [-1, 2] : ne.$$

$$(21) \quad \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE, \quad \mathbf{A}_2 = [1, 1] : min.$$

$$(22) \quad \mathbf{A}_1 = \left[\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right] : NE.$$

$$(23) \quad \mathbf{A}_1 = [-2, -2] : NE.$$

$$(24) \quad \mathbf{A}_1 = [2, 4] : min.$$

$$(25) \quad \mathbf{A}_1 = [0, 0] : min.$$