

Odhadněte hodnotu funkce $f(x, y)$ v bodě A :

$$f(x, y) = \frac{\ln(xy^3 + 4)}{x^2}, \quad A = [3.1, -0.9].$$

Řešení: K odhadu funkční hodnoty využijeme tečné roviny τ ke grafu funkce ve vhodně zvoleném bodě. Obecná rovnice roviny má totiž tvar

$$\tau : ax + by + cz + d = 0,$$

kde a, b, c, d jsou reálné koeficienty. Vyjádříme-li si z této rovnice z a budeme-li na tento zápis pohlížet jako na definiční předpis funkce $z(x, y)$, pak k určení hodnoty této funkce potřebujeme pouze základní aritmetické operace. Platí totiž

$$z = z(x, y) = \frac{-ax - by - d}{c}.$$

Dále platí, že tečná rovina τ a graf funkce mají společný bod dotyku a v jeho okolí můžeme funkci $f(x, y)$ pomocí tečné roviny aproximovat. Proto si zvolíme vhodný bod T , v němž tečnou rovinu spočteme. Neměl by „ležet daleko“ od bodu A a také by měl být snadno „dosaditelný“ do $f(x, y)$. Takovým bodem je v našem případě bod $T = [3, -1]$.

Připomeňme si jeden ze „vzorců“ pro výpočet tečné roviny τ k funkci $f(x, y)$ v bodě $T = [T_x, T_y]$

$$\tau : \frac{\partial f}{\partial x}(T)(x - T_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(T)(y - T_y) - z + f(T) = 0.$$

Spočteme si nejprve funkční hodnotu $f(T)$ a hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}(T)$ resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(T)$

$$\begin{aligned} f(T) &= f(T_x, T_y) = f(1, 2) = \frac{\ln(3 \cdot (-1)^3 + 4)}{3^2} = \frac{\ln(1)}{9} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \frac{\ln(xy^3 + 4)}{x^2}}{\partial x} = \frac{\frac{1}{xy^3 + 4} y^3 x^2 - \ln(xy^3 + 4) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(T) &= \frac{\frac{1}{3 \cdot (-1)^3 + 4} (-1)^3 3^2 - \ln(3 \cdot (-1)^3 + 4) \cdot 2 \cdot 3}{(3^2)^2} = \frac{-9}{81} = -\frac{1}{9}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \frac{\ln(xy^3 + 4)}{x^2}}{\partial y} = \frac{\frac{1}{xy^3 + 4} 3xy^2 x^2 - \ln(xy^3 + 4) \cdot 0}{(x^2)^2} = \frac{3y^2}{x(xy^3 + 4)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(T) &= \frac{3 \cdot (-1)^2}{3(3 \cdot (-1)^3 + 4)} = \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

Odsud a z uvedeného vzorce již máme rovnici roviny τ ve tvaru $-\frac{1}{9}(x - 3) + 1(y + 1) - z + 0 = 0$, který můžeme vynásobením -9 převést do tvaru

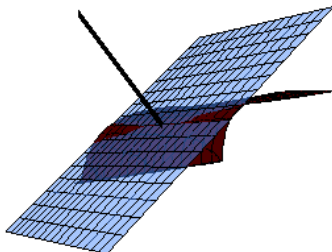
$$\tau : x - 9y + 9z - 12 = 0.$$

K požadovanému odhadu funkční hodnoty však použijeme první tvar, resp. vyjádření z z něj, protože do takového tvaru se bod $A = [3.1, -0.9]$ bude dosazovat nejlépe. Máme tedy

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{9}(x - 3) + 1(y + 1) \longrightarrow z(x, y) = -\frac{1}{9}(x - 3) + (y + 1) \\ z(3.1, -0.9) &= -\frac{1}{9}(3.1 - 3) + (-0.9 + 1) = -\frac{1}{9}(0.1) + (0.1) = 0.1 \left(-\frac{1}{9} + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{90} = \frac{1}{45} = 0.088888 \dots \end{aligned}$$

Dodejme ještě, že „přesná“ hodnota $f(3.1, -0.9)$ spočtená kalkulátorem je 0.0576423, chyba našeho odhadu tedy je cca 0.03.

Jak tečná rovina τ „přiléhá“ ke grafu funkce $f(x, y)$ je znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1: Tečná rovina τ a graf fce $f(x, y)$

V obrázku 1 je zakreslena také normála. Proto než příklad opustíme, zapíšeme i její rovnici. Připomeňme si, že koeficienty a, b, c z obecné rovnice roviny jsou také koeficienty normálového vektoru $\mathbf{n}$ dané roviny, tj. $\mathbf{n} = [a, b, c]$.

V případě, že jde o tečnou rovinu k funkci $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{T} = [T_x, T_y]$, lze normálový vektor psát jako

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T}), -1 \right],$$

což si lze snadno odvodit i ze zde uvedeného vzorce tečné roviny.¹

Nyní si již zapíšeme rovnici normály $\mathbf{n}$ ke grafu funkce $f(x, y) = \frac{\ln(xy^3+4)}{x^2}$ v bodě $\mathbf{T} = [3, -1]$. K tomu samozřejmě využijeme normálového vektoru, jehož složky známe z výpočtu tečné roviny τ , tj.

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T}), -1 \right] = \left[-\frac{1}{9}, 1, -1 \right].$$

Kromě vektoru však k zápisu přímky potřebujeme také bod, který na ní leží. Tím je samozřejmě bod dotyku tečné roviny a grafu $f(x, y)$, což je v tomto případě bod $\mathbf{T} = [T_x, T_y, f(T_x, T_y)] = [3, -1, 0]$.

Rovnice normály tak jsou

$$\mathbf{n} : \mathbf{T} + t \cdot \mathbf{n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{n} : [3, -1, 0] + t \cdot \left[-\frac{1}{9}, 1, -1 \right], \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} x(t) &= T_x + t \cdot n_1, \quad t \in \mathbb{R}, & x(t) &= 3 - \frac{1}{9}t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= T_y + t \cdot n_2, \quad t \in \mathbb{R}, & y(t) &= -1 + 1t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z(t) &= T_z + t \cdot n_3, \quad t \in \mathbb{R}, & z(t) &= -1t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

První zápis je rovnice vektorová, další tři pak spolu tvoří parametrickou rovnici přímky (v tomto případě normály). Obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje.

Samozřejmě lze místo vektoru $[-\frac{1}{9}, 1, -1]$ použít např. vektor $-9\mathbf{n} = [1, -9, 9]$, díky jehož tvaru se zápis rovnic normály krapet zpřehlední

$$x(t) = 3 + t, \quad y(t) = -1 - 9t, \quad z(t) = 9t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

¹Případně naopak ze znalosti normálového vektoru lze snadno dojít k obecné rovnici roviny.

K funkci $f(x, y)$ určete tečnou rovinu τ a normálu n v bodě A .

(1) $f(x, y) = \ln(2 - x^2 + 3y)$, $A = [-2, 1, ?]$.

(2) $f(x, y) = \cos(x + 2y^2)$, $A = \left[\frac{\pi}{2}, 0, ?\right]$.

(3) $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x}{y}}$, $A[-3, 1, ?]$.

(4) $f(x, y) = \frac{1}{2y^2 - x}$, $A = [1, 1, ?]$.

(5) $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$, $A = [1, 1, ?]$.

(6) $f(x, y) = \sin(xy^2 - 1)$, $A = [1, -1, ?]$.

(7) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$, $A = [2, 3, ?]$.

(8) $f(x, y) = 3x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 6x + 5y + 10$, $A = [1, -1, ?]$.

(9) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $A = [1, 1, ?]$.

(10) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A = [4, -3, ?]$.

(11) $f(x, y) = xy$, $A = [2, 1, ?]$.

(12) $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $A = [2, 3, ?]$.

(13) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $A = [3, 4, ?]$.

(14) $f(x, y) = \ln(x + y)$, $A = [1, 2, ?]$.

(15) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - y^2}}$, $A = [5, 2, ?]$.

K funkci $f(x, y)$ určete tečnou rovinu τ a normálu n v bodě A .

$$(1) \quad n : x(t) = 4t - 2, y(t) = 3t - 1, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 4x + 3y - z + 5 = 0.$$

$$(2) \quad n : x(t) = -t + \frac{\pi}{2}, y(t) = 0, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -x - z + \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$(3) \quad n : x(t) = -t - 3, y(t) = 3t + 1, z(t) = 2 - 4t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -x + 3y - 4z + 2 = 0.$$

$$(4) \quad n : x(t) = t + 1, y(t) = -4t + 1, z(t) = -t + 1, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - 4y - z + 4 = 0.$$

$$(5) \quad n : x(t) = -t + 1, y(t) = t + 1, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -x + y - z = 0.$$

$$(6) \quad n : x(t) = t + 1, y(t) = -2t - 1, z(t) = -t + 0, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - 2y - z - 3 = 0.$$

$$(7) \quad n : x(t) = 4t + 2, y(t) = -t + 3, z(t) = -2t + 1, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 4x - y - 2z - 3 = 0.$$

$$(8) \quad n : x(t) = 1 + 12t, y(t) = -1 - 7t, z(t) = 9 - t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 12x - 7y - z - 10 = 0.$$

$$(9) \quad n : x(t) = 1 + t, y(t) = 1 - t, z(t) = 1 - t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - y - z + 1 = 0.$$

$$(10) \quad n : x(t) = 4 + 4t, y(t) = -3 - 3t, z(t) = 5 - 5t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 4x - 3y - 5z = 0.$$

$$(11) \quad n : x(t) = 2 + t, y(t) = 1 + 2t, z(t) = 2 - t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x + 2y - z - 2 = 0.$$

$$(12) \quad n : x(t) = 2 + 8t, y(t) = 3 + 6t, z(t) = 17 - t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 8x + 6y - z - 17 = 0.$$

$$(13) \quad n : x(t) = 3 - 17t, y(t) = 4 - 11t, z(t) = -7 - 5t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 17x + 11y + 5z - 60 = 0.$$

$$(14) \quad n : x(t) = 1 + t, y(t) = 2 + t, z(t) = \ln 3 - 3t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x + y - 3z + 3(\ln 3 - 1) = 0.$$

$$(15) \quad n : x(t) = -t + 5, y(t) = 4t + 2, z(t) = -2t + 1, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -x + 4y - 2z - 1 = 0.$$