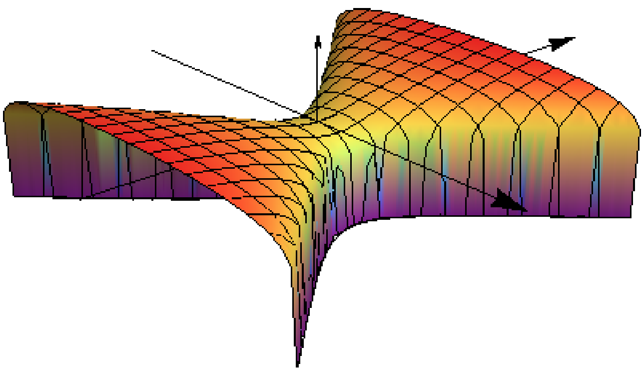
Určete, zda funkce $f(x,y)=\ln(1-x^2+y^2)$ v bodě $\boldsymbol{A}=[-1,1]$ ve směru vektorů $\boldsymbol{u}_1=[1,0]$, $\boldsymbol{u}_2=[0,-1]$, $\boldsymbol{u}_3=[1,-1]$ a $\boldsymbol{u}_4=[1,2]$ roste či klesá a určete rychlost změny.

Řešení: Funkce $f(x,y)$ je definovány pro všechny body $\mathbb{R}^2$, které splňují podmínku

$$1-x^2+y^2>0, \text{ tj. } 1>x^2-y^2,$$

což jsou body „uvnitř“ hyperboly $x^2+y^2=1$.

Funkční hodnota v bodě $\boldsymbol{A}$ je $f(1,-1)=\ln(1)=0$. Pro lepší „geometrickou“ představu si vykreslíme celou plochu, která je grafem funkce $f(x,y)$, viz. obr. 2



Obrázek 1: Náčrtek plochy $f(x,y)=\ln(1-x^2+y^2)$

K rozpoznání růstu či klesání dané funkce určitém směru nám pomůže *gradient*, tj. vektor

$$\boldsymbol{\nabla} f=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\left[\frac{\partial\ln(1-x^2+y^2)}{\partial x},\frac{\partial\ln(1-x^2+y^2)}{\partial y}\right]=\left[\frac{-2x}{1-x^2+y^2},\frac{2y}{1-x^2+y^2}\right].$$

Protože vyšetřujeme funkci $f(x,y)$ v bodě $\boldsymbol{A}$, spočteme si dále gradient v tomto konkrétním bodě. Nejde o nic jiného než o dosazení souřadnic bodu do předchozího vztahu

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{A})=\left[\frac{-2\cdot(-1)}{1-(-1)^2+1^2},\frac{2\cdot 1}{1-(-1)^2+1^2}\right]=[2,2]$$

Vynásobíme-li skalárně vektor $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{A})$ s vektorem popisujícím vyšetřovaný směr můžeme zjistit, zda v tomto směru funkce klesá či stoupá.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{u}_1&=[2,2]\cdot[1,0]=2\cdot 1+2\cdot 0=2>0,\\
\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{u}_2&=[2,2]\cdot[0,-1]=2\cdot 0+2\cdot(-1)=-2<0,\\
\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{u}_3&=[2,2]\cdot[1,-1]=2\cdot 1+2\cdot(-1)=0,\\
\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{u}_4&=[2,2]\cdot[1,2]=2\cdot 1+2\cdot 2=6>0.
\end{aligned}$$

Z těchto výsledků již lze vyčíst, že ve směru vektorů $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_4$ funkce roste, ve směru $\boldsymbol{u}_2$ klesá a ve směru $\boldsymbol{u}_3$ je konstantní.

Chceme-li dále určit velikost/rychlost stoupání či klesání, postupujeme stejně až na jednu drobnou změnu. Gradient musíme skalárně vynásobit vektorem, který má „stejný směr“ jako vektor $\boldsymbol{u}_i$, aale má jednotkovou velikost. Takovým vektorem je vektor $\boldsymbol{u}_i / \|u_i\|$. Výsledek tohoto součinu nazýváme směrovou derivací funkce $f(x,y)$ v bodě $\boldsymbol{A}$ a ve směru $\boldsymbol{u}$, označme jej $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A})$.

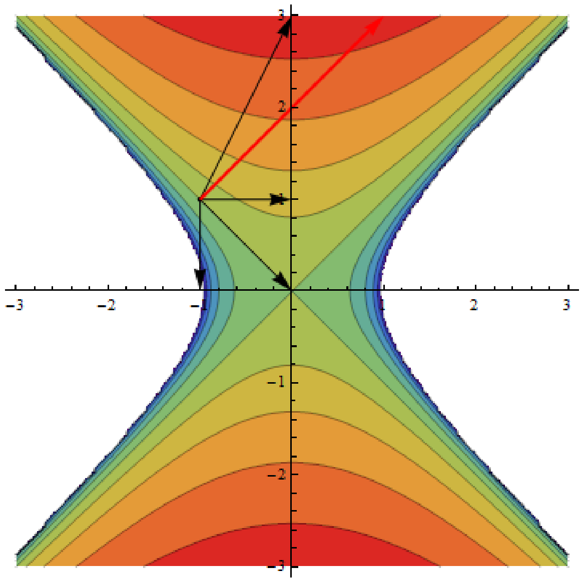
Protože vektory $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$ mají jednotkovou velikost a ve směru vektoru $\boldsymbol{u}_3$ je funkce konstantní, provedeme výpočet pouze pro $\boldsymbol{u}_4$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_4}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{A}) \cdot \frac{\boldsymbol{u}_4}{\|u_4\|} &= [2,2] \cdot \frac{[1,2]}{\sqrt{\boldsymbol{u}_4 \cdot \boldsymbol{u}_4}} = [2,2] \cdot \frac{[1,2]}{\sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2}} = \\ &= [2,2] \cdot \frac{[1,2]}{\sqrt{5}} = [2,2] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right] = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Z výpočtu je také patrné, že výsledek $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{u}_4$ stačilo vydělit velikostí vektoru $\boldsymbol{u}_4$.

Na závěr ještě dodejme, že vektor $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{A})$ je vektorem, který určuje směr, v kterém funkce $f(x,y)$ v daném bodě $\boldsymbol{A}$ nejrychleji roste.

Na obr. **??** jsou naznačen pohled na vrstevnice plochy $f(x,y) = \ln(1 - x^2 + y^2)$. Přitom, zde červená značí kladné hodnoty a modrá záporné. Jsou zde zakresleny také všechny uvažované vektory, takže je názorně vidět, že ve směru $\boldsymbol{u}_2$ „jdeme z bodu $\boldsymbol{A}$ do modrých-záporných hodnot.“ Stejně tak si lze všimnout, že vektor $\boldsymbol{u}_3$ „leží“ na vrstevnici. A konečně, že vektor $\boldsymbol{\nabla} f$ (zvýrazněný červeně) je k vrstevnici procházející bodem $\boldsymbol{A}$ kolmý.



Obrázek 2: Náčrtek plochy $f(x,y) = \ln(1 - x^2 + y^2)$

Vypočtěte gradient $u(x, y, z)$ a směrovou derivaci v daném bodě $\boldsymbol{A}$ ve směru $\boldsymbol{b}$.

$$u(x, y, z) = z\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}, \quad \boldsymbol{A} = [2, -4, 3], \quad \boldsymbol{b} = [1, 2, 2].$$

Řešení: Funkce $u(x, y, z)$ je definována pro všechny body $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$. Funkční hodnota v bodě $\boldsymbol{A}$ je $u(2, -4, 3) = 3$. A s pomocí gradientu resp. směrové derivace i zde můžeme zjistit, zda funkce v daném směru roste nebo klesá. Protože však grafem funkce tří proměnných je čtyřrozměrná plocha, musíme oželet grafickou představu a věnovat se pouze výpočtům. Nicméně výpočty jsou „skoro stejné“ jako v předchozím příkladě.

Nejprve tedy spočteme gradient resp. gradient v bodě $\boldsymbol{A}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} u &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial\, z\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}}{\partial x}, \frac{\partial\, z\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}}{\partial y}, \frac{\partial\, z\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}}{\partial z}\right] = \\
&= \left[\frac{2xz\left(x^2 + y\right)}{\sqrt{1 + \left(x^2 + y\right)^2}}, \frac{z\left(x^2 + y\right)}{\sqrt{1 + \left(x^2 + y\right)^2}}, \sqrt{1 + \left(x^2 + y\right)^2}\right], \\
\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{A}) &= [0, 0, 1].
\end{aligned}$$

Dále si spočteme velikost vektoru $\boldsymbol{b}$ a budeme jej normovat, tj. získáme z něj vektor $\boldsymbol{b}_n$ stejného směru s jednotkovou velikostí

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{b}| &= \sqrt{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3, \\
\boldsymbol{b}_n &= \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right].
\end{aligned}$$

Teď již výpočty dokončíme, a to jedním skalárním součinem

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{b}_n = [0, 0, 1] \cdot \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}.$$

Je dopočítáno a můžeme konstatovat, že funkce $u(x, y, z)$ je v bodě $\boldsymbol{A}$ a ve směru $\boldsymbol{b}$ rostoucí.

Vypočtěte gradient $u(x,y,z)$ a směrovou derivaci v daném bodě $\boldsymbol{A}$ ve směru $\boldsymbol{b}$.

(1) $u(x,y,z) = x^3 - xyz - y^2 + \sqrt{z}, \quad \boldsymbol{A} = \left[0, 4, \frac{1}{4}\right], \quad \boldsymbol{b} = [1,2,3]\,.$

(2) $u(x,y,z) = x^3y^2 + x^2z^2 - y^3z, \quad \boldsymbol{A} = \left[\frac{1}{2}, 0, 4\right], \quad \boldsymbol{b} = [4,-3,0]\,.$

(3) $u(x,y,z) = z^2\cos(x+2y), \quad \boldsymbol{A} = \left[\pi, \frac{\pi}{2}, 2\right], \quad \boldsymbol{b} = [2,-2,1]\,.$

(4) $u(x,y,z) = \ln\left(\frac{3x+2y}{z}\right), \quad \boldsymbol{A} = [1,-1,1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [2,-1,2]\,.$

(5) $u(x,y,z) = x^2 - 2xy + \frac{z^2}{y^3}, \quad \boldsymbol{A} = [1,-1,1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [2,-1,2]\,.$

(6) $u(x,y,z) = \cos(x-2y) - \sin(y-2z), \quad \boldsymbol{A} = \left[\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right], \quad \boldsymbol{b} = [1,-1,1]\,.$

(7) $u(x,y,z) = -x\,\mathrm{tg}\,(y-2z)\,, \quad \boldsymbol{A} = \left[2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right], \quad \boldsymbol{b} = \left[1, 1, \frac{1}{2}\right].$

(8) $u(x,y,z) = x^2 + xy + 3x + 2y^2 - 2y + 3z^2 - 6z, \quad \boldsymbol{A} = [1,1,1]\,, \quad \boldsymbol{b} = \left[0, 1, \sqrt{2}\right].$

(9) $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2+4}, \quad \boldsymbol{A} = [2,2,2]\,, \quad \boldsymbol{b} = [1,1,1]\,.$

(10) $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz, \quad \boldsymbol{A} = [1,1,3]\,, \quad \boldsymbol{b} = [-1,2,-1]\,.$

(11) $u(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} + \frac{4}{xyz}, \quad \boldsymbol{A} = [-1,-1,-1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [-5,-6,-7]\,.$

(12) $u(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z}, \quad \boldsymbol{A} = [1,1,1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [3,-2,4]\,.$

(13) $u(x,y,z) = \sin(xyz), \quad \boldsymbol{A} = [1,0,-5]\,, \quad \boldsymbol{b} = [0,1,2]\,.$

(14) $u(x,y,z) = \ln(x+2y+3z), \quad \boldsymbol{A} = [6,-1,-1]\,, \quad \boldsymbol{b} = \left[\frac{1}{2}, 1, 1\right].$

(15) $u(x,y,z) = \log(x+y) - \log\left(\frac{3x}{2} + z\right) + \log(y-z), \quad \boldsymbol{A} = [2,-1,-2]\,, \quad \boldsymbol{b} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right].$

(16) $u(x,y,z) = z\left(x^2 + y + 1\right)^2, \quad \boldsymbol{A} = [2,-4,1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [2,-1,2]\,.$

(17) $u(x,y,z) = (x + 2y - 3z)^2 + x, \quad \boldsymbol{A} = [2,0,1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [3,0,4]\,.$

(18) $u(x,y,z) = \frac{x \sin\left(1 - y^2\right)}{z}, \quad \boldsymbol{A} = [1,1,-2]\,, \quad \boldsymbol{b} = [4,-3,0]\,.$

(19) $u(x,y,z) = x \operatorname{tg}\left(z - y^2\right), \quad \boldsymbol{A} = [1,-1,1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [2,-2,1]\,.$

(20) $u(x,y,z) = x^2 z + xy^2 + x\sqrt{5 - z} - \frac{y}{z}, \quad \boldsymbol{A} = [1,-2,1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [0,0,-1]\,.$

Vypočtěte gradient $u(x,y,z)$ a směrovou derivaci v daném bodě $\boldsymbol{A}$ ve směru $\boldsymbol{b}$.

(1) $\nabla u = \left[3x^2 - yz, -xz - 2y, \dfrac{1}{2\sqrt{z}} - xy\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = -\sqrt{14}.$

(2) $\nabla u = \left[3x^2y^2 + 2xz^2, 2x^3y - 3y^2z, 2x^2z - y^3\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = \dfrac{64}{5}.$

(3) $\nabla u = \left[-z^2\sin(x+2y), -2z^2\sin(x+2y), 2z\cos(x+2y)\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = \dfrac{4}{3}.$

(4) $\nabla u = \left[\dfrac{3}{3x+2y}, \dfrac{2}{3x+2y}, -\dfrac{1}{z}\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = \dfrac{2}{3}.$

(5) $\nabla u = \left[2x - 2y, -2x - \dfrac{3z^2}{y^4}, \dfrac{2z}{y^3}\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = 3.$

(6) $\nabla u = \left[-\sin(x-2y), 2\sin(x-2y) - \cos(y-2z), 2\cos(y-2z)\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = 0.$

(7) $\nabla u = \left[-\mathrm{tg}\,(y-2z), -\dfrac{x}{\cos^2(y-2z)}, \dfrac{2x}{\cos^2(y-2z)}\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = 0.$

(8) $\nabla u = [2x + y + 3, x + 4y - 2, 6z - 6], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = \sqrt{3}.$

(9) $\nabla u = \left[\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

(10) $\nabla u = [2x - 3yz, 2y - 3xz, 2z - 3xy], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = -\dfrac{5}{3}\sqrt{6}.$

(11) $\nabla u = \left[-\dfrac{4}{x^2yz} - \dfrac{1}{x^2}, -\dfrac{4}{xy^2z} - \dfrac{2}{y^2}, -\dfrac{4}{xyz^2} - \dfrac{3}{z^2}\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = \sqrt{110}.$

(12) $\nabla u = \left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{x^2}, \dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{y^2}, \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2}\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = 0.$

(13) $\nabla u = \left[yz\cos(xyz), xz\cos(xyz), xy\cos(xyz)\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = -\sqrt{5}.$

(14) $\nabla u = \left[\dfrac{1}{x+2y+3z}, \dfrac{2}{x+2y+3z}, \dfrac{3}{x+2y+3z}\right], \ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A}) = \dfrac{11}{3}.$

(15) $\boldsymbol{\nabla} u=\left[\frac{1}{x+y}-\frac{3}{2\left(\frac{3x}{2}+z\right)}, \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y-z}, -\frac{1}{\frac{3x}{2}+z}-\frac{1}{y-z}\right], \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A})=-1.$

(16) $\boldsymbol{\nabla} u=\left[4xz\left(x^2+y+1\right), 2z\left(x^2+y+1\right), \left(x^2+y+1\right)^2\right], \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A})=\frac{16}{3}.$

(17) $\boldsymbol{\nabla} u=\left[2(x+2y-3z)+1, 4(x+2y-3z), -6(x+2y-3z)\right] \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A})=\frac{21}{5}.$

(18) $\boldsymbol{\nabla} u=\left[\frac{\sin\left(1-y^2\right)}{z}, -\frac{2xy\cos\left(1-y^2\right)}{z}, -\frac{x\sin\left(1-y^2\right)}{z^2}\right] \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A})=-\frac{3}{5}.$

(19) $\boldsymbol{\nabla} u=\left[\operatorname{tg}\left(z-y^2\right), -\frac{2xy}{\cos^2\left(z-y^2\right)}, \frac{x}{\cos^2\left(z-y^2\right)}\right] \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A})=-1.$

(20) $\boldsymbol{\nabla} u=\left[2xz+y^2+\sqrt{5-z}, 2xy-\frac{1}{z}, x^2-\frac{x}{2\sqrt{5-z}}+\frac{y}{z^2}\right] \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{A})=\frac{5}{4}.$