Nalezněte tečnu a normálu procházející bodem $\boldsymbol{A} = [1,1]$ ke křivce zadané rovnicí

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2y^3.$$

Řešení: Pokud bychom chtěli ze zadané rovnice vyjádřit y jako funkci proměnné x, narazíme. Již při roznásobení levé strany totiž dostáváme tvar

$$x^6 + 3x^4y^2 - 3x^4 + 3x^2y^4 - 6x^2y^2 + 3x^2 + y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1 = x^2y^3,$$

který neskýtá příliš šancí na jednoduché úpravy. Vyplatí se tedy uvažovat o použití znalostí implicitních funkcí a jejich derivací.

Nejprve si rovnici přepíšeme do tvaru

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2y^3 = 0,$$

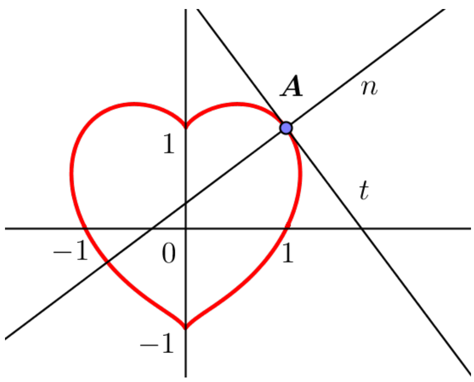
jehož levou stranu si označíme za $F(x,y)$. Dále spočteme parciální derivace této funkce $F(x,y)$ podle x, tj. $F_x(x,y)$, resp. podle y, tj. $F_y(x,y)$ a také jejich hodnoty v bodě $\boldsymbol{A} = [1,1]$.

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= 3(x^2+y^2-1)^2(2x) - 2xy^3 = 6x(x^2+y^2-1)^2 - 2xy^3, \quad F_x(\boldsymbol{A}) = 4,\\ F_y(x,y) &= 3(x^2+y^2-1)^2(2y) - x^2\left(3y^2\right) = 6y(x^2+y^2-1)^2 - 3x^2y^2, \quad F_y(\boldsymbol{A}) = 3. \end{aligned}$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do vztahů (vzorců) pro výpočet tečny resp. normály

$$\begin{aligned} t &: F_x(\boldsymbol{A})(x-x_0) + F_y(\boldsymbol{A})(y-y_0) = 0, \qquad t : 4(x-1) + 3(y-1) = 4x + 3y - 7 = 0,\\ n &: F_y(\boldsymbol{A})(x-x_0) - F_x(\boldsymbol{A})(y-y_0) = 0 \qquad n : 3(x-1) - 4(y-1) = 3x - 4y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Graficky je vše znázorněno na obr. 1. Všimněme si zde také toho, že i z tvaru křivky je patrné, že nalezení funkce/funkcí $y = f(x)$ popisujících tento graf by bylo značně komplikované.



Obrázek 1: Křivka $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2y^3$ s tečnou a normálou

Na závěr ještě dodejme, jak je to s derivací y jako implicitní funkce x zadané rovnicí $F(x,y) = 0$, a to jak obecně tak v bodě $x_0 = 1$.

$$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{6x(x^2+y^2-1)^2 - 2xy^3}{6y(x^2+y^2-1)^2 - 3x^2y^2}, \quad y'(x_0) = -\frac{F_x(\boldsymbol{A})}{F_y(\boldsymbol{A})} = -\frac{4}{3}.$$

K implicitně zadané funkci $y = y(x)$ určete rovnici tečny t a normály n v bodě $\boldsymbol{A}$.

(1) $y - \cos y - 2x = 0, \quad \boldsymbol{A} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$

(2) $x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x - 2 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [0, 2].$

(3) $\mathrm{e}^{xy} + \sin y + y^2 - 1 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [2, 0].$

(4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 5 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [8, 1].$

(5) $1 - (x - y)\left(x^2 + y^2\right) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 0].$

(6) $(2 - xy)(x - y)^2 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 2].$

(7) $(y - x)\mathrm{e}^{1-xy} = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1].$

(8) $\sin\left(1 - \dfrac{x^2}{y}\right) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1].$

(9) $\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y}{x^2} = 0, \quad \boldsymbol{A} = [2, -4].$

(10) $\dfrac{2 - xy}{2 - x^2y^2} = 0, \quad \boldsymbol{A} = [2, 1].$

(11) $\ln\left(5 - x^2y\right) - x + 2y = 0, \quad \boldsymbol{A} = [2, 1].$

(12) $\sin^3(x) - \sin\left(1 - y^2\right) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [0, 1].$

(13) $\ln\left(x^3 + y^2\right) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [-2, 3].$

(14) $1 - \sqrt{y^2 - x^3} = 0, \quad \boldsymbol{A} = [2, 3].$

(15)
$(x - y)^4 - (x + y)^2 + 2y = 0, \quad \boldsymbol{A} = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right].$

(16) $x^2y + xy^2 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1].$

(17) $\cos\left(1 - x^2y\right) + x = 0, \quad \boldsymbol{A} = [-1, 1].$

(18) $x^3 - xy + y^2 - 1 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [0, 1].$

(19) $\sqrt{x^3 - xy} - y^2 - 1 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 0].$

(20) $\dfrac{1}{2 - xy} - x^2 + 2(y - 1) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1].$

K implicitně zadané funkci $y = y(x)$ určete rovnici tečny t a normály n v bodě $\boldsymbol{A}$.

(1) $t: 2x - y + 1 = 0,$
$n: 2x + 4y + 1 = 0.$

(2) $t: \left(2 + \mathrm{e}^2\right) x + y - 2 = 0,$
$n: x - \left(2 + \mathrm{e}^2\right) y + 2\left(2 + e^2\right) = 0.$

(3) $t: y = 0,$
$n: x = 2.$

(4) $t: x + y - 10 = 0,$
$n: 2x - y - 15 = 0.$

(5) $t: x - y - 3 = 0,\ n\quad: x + 3y - 1 = 0.$

(6) $t: 2x + y - 4 = 0,$
$n: x - 2y + 3 = 0.$

(7) $t: x - y = 0,$
$n: x + y - 2 = 0.$

(8) $t: 2x - y - 1 = 0,$
$n: x + 2y - 3 = 0.$

(9) $t: 4x + y - 4 = 0,$
$n: x - 4y - 18 = 0.$

(10) $t: x + 2y - 4 = 0,$
$n: 2x - y - 3 = 0.$

(11) $t: 5x + 2y - 12 = 0,$
$n: 2x - 5y + 1 = 0.$

(12) $t: y = 1,$
$n: x = 0.$

(13) $t: 2x + y + 1 = 0,$
$n: x - 2y + 8 = 0.$

(14) $t: 2x - y - 1 = 0,$
$n: x + 2y - 8 = 0.$

(15) $t: 4x - 2y - 3 = 00,$
$n: 2x + 4y + 1 = 0.$

(16) $t: x + y - 2 = 0,$
$n: x = y.$

(17) $t: x = -1,$
$n: y = 1.$

(18) $t: x - 2y + 2 = 0,$
$n: 2x + y - 1 = 0.$

(19) $t: 3x - y - 3 = 0,$
$n: x + 3y - 1 = 0.$

(20) $t: x - 3y + 2 = 0,$
$n: 3x + y - 4 = 0.$