Spočtěte limity :

$$\lim_{[x,y]\to[1,-1]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}, \quad \lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}, \quad \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}.$$

Řešení: Ve všech případech máme spočíst limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$, jejíž definičním oborem je

$$\mathcal{D}(f) = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y \right\}.$$

Bod $[1,-1]$ tedy definičnímu oboru patří a první z limit lze vyřešit pouhým dosazením, tj.

$$\lim_{[x,y]\to[1,-1]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \frac{1^2-(-1)^2}{1^3-(-1)^3} = \frac{1-1}{1-(-1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Ovšem body $[1,1]$ a $[0,0]$ do definičního oboru nepatří, výpočet limity tedy bude poněkud komplikovanější. Pomůže nám však, pokud provedeme několik drobných algebraických úprav.

$$\lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{\cancel{(x-y)}\,(x+y)}{\cancel{(x-y)}\,(x^2+xy+y^2)} = \lim_{[x,y]\to[1,1]} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{2}{3}.$$

Do tvaru, který jsme takto obdrželi, již šlo dosadit, a limita je spočtena.

Bohužel, pokusíme-li se užít stejné úpravy také v posledním příkladě, neuspějeme

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{0}{0}.$$

Obdrželi jsme totiž neurčitý výraz „$\frac{0}{0}$." Než se pokusíme „určit" tento neurčitý výraz, připomeňme si něco z vlastností a výpočetních postupů limit funkce jedné proměnné.

V případě $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ je možné se k bodu a „blížit" pouze po ose x, a to buď zleva nebo zprava. Pokud jsme dokázali určit limitu zprava $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ i zleva $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ a tyto se rovnaly, pak jsme měli určenou „celou" limitu. V případě nerovnosti „levé" a „pravé" limity jsme konstatovali, že limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Zkusme si touto analogií pomoci i u limity funkce dvou proměnných. Drobnou změnou zde je, že směrů a cest, kterými se můžeme k bodu, v němž limitu hledáme, „připlížit" je nekonečně mnoho. To je samozřejmě výhodou i nevýhodou zároveň.

Ze všech „cest" si můžeme libovolně vybrat takové, se kterými se nám bude dobře pracovat. Dojdeme-li pro dvě různé „cesty" k různým výsledků můžeme prohlásit, že limita neexistuje. Ovšem pozor! Dojdeme-li pro dvě různé „cesty" ke stejným výsledkům, nemusí to znamenat, že jsme limitu nalezli, neboť může existovat další „cesta" s výsledkem jiným.

Vraťme se nyní k našemu příkladu a zvolme si vhodnou cestu. Budeme se k bodu $[0,0]$ blížit po ose x, tedy po přímce $y=0$. Díky této volbě můžeme vyšetřovaný výraz dále zjednodušit, a to následovně:

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+0}{x^2+x\cdot 0+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.$$

O poslední limitě již lze říct, že neexistuje, protože je $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ a $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Stejný závěr je platný i pro $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$.

Vypočítejte limitu :

(1) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,2]} \dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$.

(2) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} \dfrac{x^3y-xy^3+1}{(x-y)^3}$.

(3) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x-2y}{3x+y}$.

(4) $\lim\limits_{[x,y]\to[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} \big(\operatorname{tg} y + 2\operatorname{cotg}(x+y)\big)$.

(5) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{y}{x-y}$.

(6) $\lim\limits_{[x,y]\to[-2,0]} \dfrac{x^2y+3xy+2y}{x^2y-4y}$.

(7) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} \dfrac{x+y^3}{y-x^3}$.

(8) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x+y^3}{y-x^3}$.

(9) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,-1]} \dfrac{x^2y^2-x^2-4y^2+4}{xy-2y+x-2}$.

(10) $\lim\limits_{[x,y]\to[-2,0]} \dfrac{(x+y)^2-4}{x+y+2}$.

(11) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,-1]} \dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$.

(12) $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,1]} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+3xy+2y^2}$.

(13) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+3xy+2y^2}$.

(14) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,-1]} \dfrac{x^2+4xy+4y^2}{x^2+xy-2y^2}$.

(15) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{xy+y^2}{x^2-xy}$.

(16) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x-y^2}{x-2y}$.

(17) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{y^2-x^2}$.

(18) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,1]} \dfrac{(x-y)^2-1}{1-x+y}$.

(19) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]} \dfrac{x-y^3}{y-x^3}$.

(20) $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,1]} \dfrac{xy^2+x^2y}{x^2+xy-x-y}$.

Vypočítejte limitu :

(1) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,2]} \dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2} = 8.$

(2) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} \dfrac{x^3y-xy^3+1}{(x-y)^3} = 5.$

(3) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x-2y}{3x+y}$, neexistuje.

(4) $\lim\limits_{[x,y]\to[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} (\operatorname{tg} y + 2\operatorname{cotg}(x+y)) = \sqrt{3}.$

(5) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{y}{x-y}$, neexistuje.

(6) $\lim\limits_{[x,y]\to[-2,0]} \dfrac{x^2y+3xy+2y}{x^2y-4y} = \dfrac{1}{4}.$

(7) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} \dfrac{x+y^3}{y-x^3} = 9.$

(8) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x+y^3}{y-x^3}$, neexistuje

(9) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,-1]} \dfrac{x^2y^2-x^2-4y^2+4}{xy-2y+x-2} = -4.$

(10) $\lim\limits_{[x,y]\to[-2,0]} \dfrac{(x+y)^2-4}{x+y+2} = -4.$

(11) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,-1]} \dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2} = 0.$

(12) $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,1]} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+3xy+2y^2} = -2.$

(13) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+3xy+2y^2}$, neexistuje.

(14) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,-1]} \dfrac{x^2+4xy+4y^2}{x^2+xy-2y^2} = 0.$

(15) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{xy+y^2}{x^2-xy}$, neexistuje.

(16) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x-y^2}{x-2y}$, neexistuje.

(17) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{y^2-x^2} = 0.$

(18) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,1]} \dfrac{(x-y)^2-1}{1-x+y} = -2.$

(19) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]} \dfrac{x-y^3}{y-x^3}$, neexistuje.

(20) $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,1]} \dfrac{xy^2+x^2y}{x^2+xy-x-y} = \dfrac{1}{2}.$