Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = y^3 + y^2 - 6xy + 9x^2 - 3x^3.$$

Řešení: K nalezení k lokálních funkce $f(x,y)$ je potřeba spočíst její první parciální derivace, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -9x^2 + 18x - 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 3y^2 + 2y.$$

V dalším kroku hledáme body v nichž jsou obě tyto derivace rovny nule, řešíme proto soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} -9x^2 + 18x - 6y & = & 0 \\ -6x + 3y^2 + 2y & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} -3x^2 + 6x - 2y & = & 0 \\ -6x + 3y^2 + 2y & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 6x - 2y & = & 3x^2 \\ 3y^2 & = & 6x - 2y \end{array}$$

Z posledního tvaru soustavy vidíme, že musí platit $x^2 = y^2$. To nastane, když bude $x = y$ nebo $x = -y$. Dosaďme do první z rovnic nejprve $x = y$

$$-9x^2 + 18x - 6y = 0 \Rightarrow -9x^2 + 18x - 6x = 0 \Rightarrow -9x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(4 - 3x) = 0.$$

Odsud již snadno určíme řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{4}{3}$. Protože jsme vyšli ze vztahu $x = y$, dostáváme body $\boldsymbol{A}_1 = [0,0]$ a $\boldsymbol{A}_2 = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$.
Stejně tak dosaďme $x = -y$

$$-9x^2 + 18x - 6y = 0 \Rightarrow -9x^2 + 18x + 6x = 0 \Rightarrow -9x^2 + 24x = 0 \Rightarrow 3x(8 - 3x) = 0.$$

Opět snadno dopočítáme řešení $x_3 = \frac{8}{3}$.[1] A poznamenáme si další bod $\boldsymbol{A}_3 = \left[\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right]$.
Body $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ a $\boldsymbol{A}_3$ jsou „podezřelé,“ může v nich nastat extrém. Abychom zjistili, zda tomu tak opravdu je, musíme znovu derivovat.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18 - 18x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2.$$

Z druhých derivací sestavíme matici, resp. determinant, který v jednotlivých „podezřelých“ bodech vyhodnotíme.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 - 18x & -6 \\ -6 & 6y + 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}_1 : \begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\boldsymbol{A}_2 : \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = -96,$$

$$\boldsymbol{A}_3 : \begin{vmatrix} -30 & -6 \\ -6 & -14 \end{vmatrix} = 384.$$

[1] Řešení $x_1 = 0$ již známe.

Takto spočtené determinanty nám říkají, že

- v bodě $\boldsymbol{A}_3$ má funkce lokální extrém, a to maximum. Determinant matice $\boldsymbol{A}_3$ je totiž kladný a $(\boldsymbol{A})_{1,1} = -30$ je záporný.
- v bodě $\boldsymbol{A}_2$ funkce lokální extrém nemá, protože determinant matice $\boldsymbol{A}_3$ je záporný.
- podle tohoto nemůžeme rozhodnout, zda zde extrém nastává či nikoliv, protože determinant je roven nule. Rozhodnout lze např. „analýzou“ chování funkce v okolí „podezřelého“ bodu $\boldsymbol{A}_1$. Funkci lze psát ve tvaru $f(x,y) = (3x-y)^2 + \left(y^3 - 3x^3\right)$, z nějž je vidět, že budeme-li se kolem $\boldsymbol{A}_1$ pohybovat po přímce $y = 3x$, pak máme $f(x,y) = f(x,3x) = 24x^3$. Ovšem $24x^3$ je záporné pro $x < 0$ a kladné pro $x > 0$, proto v bodě $\boldsymbol{A}_1$ extrém nenastává.

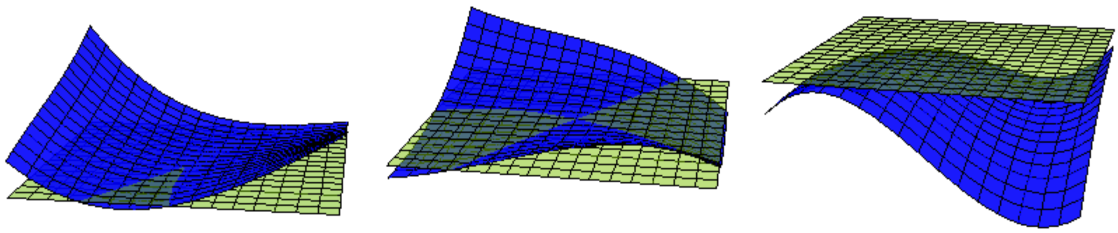
Připomeňme si zde ještě vzorec pro výpočet tečné roviny τ k funkci $f(x,y)$ v bodě $\boldsymbol{T} = \left[T_x, T_y\right]$

$$\tau : \frac{\partial f}{\partial x}\big(\boldsymbol{T}\big)\,(x - T_x) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\boldsymbol{T}\big)\,\big(y - T_y\big) - z + f\big(\boldsymbol{T}\big) = 0,$$

a uvažujme, jak vypadají tečné roviny v „podezřelých“ bodech. Protože první parciální derivace jsou v nich nulové, mají tyto roviny tvar

$$-z + f\big(\boldsymbol{A}_i\big) = 0, \text{ pro } i = 1,2,3.$$

Jde tedy o roviny rovnoběžné s rovinou $z = 0$. V případě maxima v bodě $\boldsymbol{A}$ musí graf funkce „v okolí“ tohoto bodu zůstat pod tečnou rovinou. V případě minima nad tečnou rovinou. Pokud v bodě extrém není, pak je graf funkce v okolí bodu nad i pod tečnou. Na obr. 1 je znázorněna situace v jednotlivých bodech $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ a $\boldsymbol{A}_3$.



Obrázek 1: Tečná rovina a graf fce $f(x,y)$ v bodech $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ a $\boldsymbol{A}_3$

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x,y)$.

(1) $f(x,y) = -2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$.

(2) $f(x,y) = 2 + x + \frac{x^3}{3} + y - xy$.

(3) $f(x,y) = x^2\,y^2 + \frac{x^2}{2} + y^3 - 3\,y + 3$.

(4) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$.

(5) $f(x,y) = (2-y)^2 + x^2y$.

(6) $f(x,y) = 125 - x^3 + 6xy - 8y^3$.

(7) $f(x,y) = xy^2 - y^3 + 3\ln x$.

(8) $f(x,y) = 3 - x + x^2 - y - xy + y^2$.

(9) $f(x,y) = -6x + x^2 - 9y + xy + y^2$.

(10) $f(x,y) = 7 + x - 2x^2 - 3y + 6xy - 5y^2$.

(11) $f(x,y) = 5 + 2x + x^2 + 6y - y^2$.

(12) $f(x,y) = 5 - 24x + 2x^3 + 2xy^2$.

(13) $f(x,y) = 5 + x^3 - 6xy + 8y^3$.

(14) $f(x,y) = 15 + x^3 - 18xy + y^3$.

(15) $f(x,y) = 5x^2 + 2x^3 + y^2 + xy^2$.

(16) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.

(17) $f(x,y) = 3x - x^2 + 6y - xy + y^2$.

(18) $f(x,y) = 5 + 32x + 2x^3y - x^2y^2$.

(19) $f(x,y) = (1+x^2)^2 - xy + y^2$.

(20) $f(x,y) = 3 + 8x - 10y - 8xy + 5x^2 + 5y^2$

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x, y)$.

(1)
$\boldsymbol{A}_1 = [0,0]:\ NE,\qquad \boldsymbol{A}_2 = [2,0]:\ NE,$
$\boldsymbol{A}_3 = [1,-1]:\ MAX,\qquad \boldsymbol{A}_4 = [1,1]:\ min.$

(2) $\boldsymbol{A}_1 = [1,2]:\ NE.$

(3)
$\boldsymbol{A}_1 = [0,-1]:\ NE,\ \boldsymbol{A}_2 = [0,1]:\ min.$

(4)
$\boldsymbol{A}_1 = [0,0]:\ NE,\ \boldsymbol{A}_2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]:\ min.$

(5) $\boldsymbol{A}_1 = [-2,0]:\ NE,\ \boldsymbol{A}_2 = [2,0]:\ NE,$
$\boldsymbol{A}_3 = [0,2]:\ min.$

(6)
$\boldsymbol{A}_1 = [0,0]:\ NE,\ \boldsymbol{A}_2 = \left[1, \frac{1}{2}\right]:\ MAX.$

(7) nemá extrém.

(8) $\boldsymbol{A}_1 = [1,1]:\ min.$

(9) $\boldsymbol{A}_1 = [1,4]:\ min.$

(10) $\boldsymbol{A}_1 = \left[-2, -\frac{3}{2}\right]:\ MAX.$

(11) $\boldsymbol{A}_1 = [-1,3]:\ NE.$

(12)
$\boldsymbol{A}_1 = [-2,0]:\ MAX,\ \boldsymbol{A}_2 = [2,0]:\ min,$
$\boldsymbol{A}_3 = \left[0, -2\sqrt{3}\right]:\ NE,\ \boldsymbol{A}_4 = \left[0, 2\sqrt{3}\right]:\ NE.$

(13)
$\boldsymbol{A}_1 = [0,0]:\ NE,\ \boldsymbol{A}_2 = \left[1, \frac{1}{2}\right]:\ min.$

(14) $\boldsymbol{A}_1 = [0,0]:\ NE,\ \boldsymbol{A}_2 = [6,6];\ min.$

(15)
$\boldsymbol{A}_1 = \left[-\frac{5}{3}, 0\right]:\ MAX,\ \boldsymbol{A}_2 = [0,0]:\ min,$
$\boldsymbol{A}_3 = [-1,-2]:\ NE,\ \boldsymbol{A}_4 = [-1,2]:\ NE.$

(16) $\boldsymbol{A}_1 = [0,0]:\ NE,\ \boldsymbol{A}_2 = [1,1]:\ min.$

(17) $\boldsymbol{A}_1 = \left[\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right]:\ NE.$

(18) $\boldsymbol{A}_1 = [-2,-2]:\ NE.$

(19) $\boldsymbol{A}_1 = [0,0]:\ min.$

(20) $\boldsymbol{A}_1 = [0,1]:\ min.$