

**Odhadněte hodnotu funkce  $f(x, y)$  v bodě  $A$ :**

$$f(x, y) = \frac{\ln(xy^3 + 4)}{x^2}, \quad A = [3.1, -0.9].$$

**Řešení:** K odhadu funkční hodnoty využijeme tečné roviny  $\tau$  ke grafu funkce ve vhodně zvoleném bodě. Obecná rovnice roviny má totiž tvar

$$\tau : ax + by + cz + d = 0,$$

kde  $a, b, c, d$  jsou reálné koeficienty. Vyjádříme-li si z této rovnice  $z$  a budeme-li na tento zápis pohlížet jako na definiční předpis funkce  $z(x, y)$ , pak k určení hodnoty této funkce potřebujeme pouze základní aritmetické operace. Platí totiž

$$z = z(x, y) = \frac{-ax - by - d}{c}.$$

Dále platí, že tečná rovina  $\tau$  a graf funkce mají společný bod dotyku a v jeho okolí můžeme funkci  $f(x, y)$  pomocí tečné roviny aproximovat. Proto si zvolíme vhodný bod  $\mathbf{T}$ , v němž tečnou rovinu spočteme. Neměl by „ležet daleko“ od bodu  $A$  a také by měl být snadno „dosaditelný“ do  $f(x, y)$ . Takovým bodem je v našem případě bod  $\mathbf{T} = [3, -1]$ .

Připomeňme si jeden ze „vzorců“ pro výpočet tečné roviny  $\tau$  k funkci  $f(x, y)$  v bodě  $\mathbf{T} = [T_x, T_y]$

$$\tau : \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T})(x - T_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T})(y - T_y) - z + f(\mathbf{T}) = 0.$$

Spočtěme si nejprve funkční hodnotu  $f(\mathbf{T})$  a hodnoty  $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T})$  resp.  $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T})$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{T}) &= f(T_x, T_y) = f(1, 2) = \frac{\ln(3 \cdot (-1)^3 + 4)}{3^2} = \frac{\ln(1)}{9} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \frac{\ln(xy^3+4)}{x^2}}{\partial x} = \frac{\frac{1}{xy^3+4} y^3 x^2 - \ln(xy^3+4) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T}) &= \frac{\frac{1}{3 \cdot (-1)^3 + 4} (-1)^3 3^2 - \ln(3 \cdot (-1)^3 + 4) \cdot 2 \cdot 3}{(3^2)^2} = \frac{-9}{81} = -\frac{1}{9}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \frac{\ln(xy^3+4)}{x^2}}{\partial y} = \frac{\frac{1}{xy^3+4} 3xy^2 x^2 - \ln(xy^3+4) \cdot 0}{(x^2)^2} = \frac{3y^2}{x(xy^3+4)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T}) &= \frac{3 \cdot (-1)^2}{3(3 \cdot (-1)^3 + 4)} = \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

Odsud a z uvedeného vzorce již máme rovnici roviny  $\tau$  ve tvaru  $-\frac{1}{9}(x - 3) + 1(y + 1) - z + 0 = 0$ , který můžeme vynásobením  $-9$  převést do tvaru

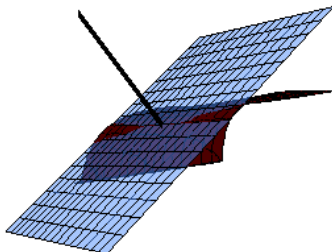
$$\tau : x - 9y + 9z - 12 = 0.$$

K požadovanému odhadu funkční hodnoty však použijeme první tvar, resp. vyjádření  $z$  z něj, protože do takového tvaru se bod  $A = [3.1, -0.9]$  bude dosazovat nejlépe. Máme tedy

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{9}(x - 3) + 1(y + 1) \quad \longrightarrow \quad z(x, y) = -\frac{1}{9}(x - 3) + (y + 1) \\ z(3.1, -0.9) &= -\frac{1}{9}(3.1 - 3) + (-0.9 + 1) = -\frac{1}{9}(0.1) + (0.1) = 0.1 \left( -\frac{1}{9} + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{90} = \frac{1}{45} = 0.088888\dots \end{aligned}$$

Dodejme ještě, že „přesná“ hodnota  $f(3.1, -0.9)$  spočtená kalkulátorem je 0.0576423, chyba našeho odhadu tedy je cca 0.03.

Jak tečná rovina  $\tau$  „přiléhá“ ke grafu funkce  $f(x, y)$  je znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1: Tečná rovina  $\tau$  a graf fce  $f(x, y)$

V obrázku 1 je zakreslena také normála. Proto než příklad opustíme, zapíšeme i její rovnici. Připomeňme si, že koeficienty  $a, b, c$  z obecné rovnice roviny jsou také koeficienty normálového vektoru  $\mathbf{n}$  dané roviny, tj.  $\mathbf{n} = [a, b, c]$ .

V případě, že jde o tečnou rovinu k funkci  $f(x, y)$  v bodě  $\mathbf{T} = [T_x, T_y]$ , lze normálový vektor psát jako

$$\mathbf{n} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T}), -1 \right],$$

což si lze snadno odvodit i ze zde uvedeného vzorce tečné roviny.<sup>1</sup>

Nyní si již zapíšeme rovnici normály  $n$  ke grafu funkce  $f(x, y) = \frac{\ln(xy^3+4)}{x^2}$  v bodě  $\mathbf{T} = [3, -1]$ . K tomu samozřejmě využijeme normálového vektoru, jehož složky známe z výpočtu tečné roviny  $\tau$ , tj.

$$\mathbf{n} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T}), -1 \right] = \left[ -\frac{1}{9}, 1, -1 \right].$$

Kromě vektoru však k zápisu přímky potřebujeme také bod, který na ní leží. Tím je samozřejmě bod dotyku tečné roviny a grafu  $f(x, y)$ , což je v tomto případě bod  $\mathbf{T} = [T_x, T_y, f(T_x, T_y)] = [3, -1, 0]$ .

Rovnice normály tak jsou

$$n : \mathbf{T} + t \cdot \mathbf{n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n : [3, -1, 0] + t \cdot \left[ -\frac{1}{9}, 1, -1 \right], \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x(t) = T_x + t \cdot n_1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 3 - \frac{1}{9}t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$y(t) = T_y + t \cdot n_2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = -1 + 1t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$z(t) = T_z + t \cdot n_3, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = -1t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

První zápis je rovnice vektorová, další tři pak spolu tvoří parametrickou rovnici přímky (v tomto případě normály). Obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje.

Samozřejmě lze místo vektoru  $\left[ -\frac{1}{9}, 1, -1 \right]$  použít např. vektor  $-9\mathbf{n} = [1, -9, 9]$ , díky jehož tvaru se zápis rovnic normály krapet zpřehlední

$$x(t) = 3 + t, \quad y(t) = -1 - 9t, \quad z(t) = 9t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

<sup>1</sup>Případně naopak ze znalosti normálového vektoru lze snadno dojít k obecné rovnici roviny.

**K** funkci  $f(x, y)$  určete tečnou rovinu  $\tau$  a normálu  $n$  v bodě  $\mathbf{A}$ .

(1)  $f(x, y) = \ln(2 - x^2 + 3y)$ ,  $\mathbf{A} = [-2, 1, ?]$ .

(2)  $f(x, y) = \cos(x + 2y^2)$ ,  $\mathbf{A} = \left[\frac{\pi}{2}, 0, ?\right]$ .

(3)  $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x}{y}}$ ,  $\mathbf{A} = [-3, 1, ?]$ .

(4)  $f(x, y) = \frac{1}{2y^2 - x}$ ,  $\mathbf{A} = [1, 1, ?]$ .

(5)  $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$ ,  $\mathbf{A} = [1, 1, ?]$ .

(6)  $f(x, y) = \sin(xy^2 - 1)$ ,  $\mathbf{A} = [1, -1, ?]$ .

(7)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$ ,  $\mathbf{A} = [2, 3, ?]$ .

(8)  $f(x, y) = 3x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 6x + 5y + 10$ ,  
 $\mathbf{A} = [1, -1, ?]$ .

(9)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ ,  $\mathbf{A} = [1, 1, ?]$ .

(10)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\mathbf{A} = [4, -3, ?]$ .

(11)  $f(x, y) = xy$ ,  $\mathbf{A} = [2, 1, ?]$ .

(12)  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ ,  $\mathbf{A} = [2, 3, ?]$ .

(13)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ ,  $\mathbf{A} = [3, 4, ?]$ .

(14)  $f(x, y) = \ln(x + y)$ ,  $\mathbf{A} = [1, 2, ?]$ .

(15)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - y^2}}$ ,  $\mathbf{A} = [5, 2, ?]$ .

(16)  $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ,  $\mathbf{A} = [1, 2, ?]$ .

(17)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $\mathbf{A} = [1, 1, ?]$ .

(18)  $f(x, y) = \frac{x}{y - x}$ ,  $\mathbf{A} = [0, 1, ?]$ .

(19)  $f(x, y) = x \cos(x - y)$ ,  $\mathbf{A} = [1, 1, ?]$ .

(20)  $f(x, y) = y \ln(x - y)$ ,  $\mathbf{A} = [2, 1, ?]$ .

**K funkci  $f(x, y)$  určete tečnou rovinu  $\tau$  a normálu  $n$  v bodě  $A$ .**

(1)  $n : x(t) = 4t - 2, y(t) = 3t - 1, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 4x + 3y - z + 5 = 0.$

(2)  $n : x(t) = -t + \frac{\pi}{2}, y(t) = 0, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -x - z + \frac{\pi}{2} = 0.$

(3)  $n : x(t) = -t - 3, y(t) = 3t + 1, z(t) = 2 - 4t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -x + 3y - 4z + 2 = 0.$

(4)  $n : x(t) = t + 1, y(t) = -4t + 1, z(t) = -t + 1, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - 4y - z + 4 = 0.$

(5)  $n : x(t) = -t + 1, y(t) = t + 1, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -x + y - z = 0.$

(6)  $n : x(t) = t + 1, y(t) = -2t - 1, z(t) = -t + 0, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - 2y - z - 3 = 0.$

(7)  $n : x(t) = 4t + 2, y(t) = -t + 3, z(t) = -2t + 1, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 4x - y - 2z - 3 = 0.$

(8)  $n : x(t) = 1 + 12t, y(t) = -1 - 7t, z(t) = 9 - t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 12x - 7y - z - 10 = 0.$

(9)  $n : x(t) = 1 + t, y(t) = 1 - t, z(t) = 1 - t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - y - z + 1 = 0.$

(10)  $n : x(t) = 4 + 4t, y(t) = -3 - 3t, z(t) = 5 - 5t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 4x - 3y - 5z = 0.$

(11)  $n : x(t) = 2 + t, y(t) = 1 + 2t, z(t) = 2 - t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x + 2y - z - 2 = 0.$

(12)  $n : x(t) = 2 + 8t, y(t) = 3 + 6t, z(t) = 17 - t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 8x + 6y - z - 17 = 0.$

(13)  $n : x(t) = 3 - 17t, y(t) = 4 - 11t, z(t) = -7 - 5t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 17x + 11y + 5z - 60 = 0.$

(14)  $n : x(t) = 1 + t, y(t) = 2 + t, z(t) = \ln 3 - 3t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x + y - 3z + 3(\ln 3 - 1) = 0.$

(15)  $n : x(t) = -t + 5, y(t) = 4t + 2, z(t) = -2t + 1, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - 4y + 2z + 1 = 0.$

$$(16) \quad n : x(t) = 1 - 6t, y(t) = 2 + 3t, z(t) = \frac{5}{2} - 4t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -6x + 3y - 4z + 10 = 0.$$

$$(17) \quad n : x(t) = 1, y(t) = 1 + t, z(t) = \frac{1}{2} + 2t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : y + 2z - 2 = 0.$$

$$(18) \quad n : x(t) = t, y(t) = 1, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - z = 0.$$

$$(19) \quad n : x(t) = 1 + t, y(t) = 1, z(t) = 1 - t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - z = 0.$$

$$(20) \quad n : x(t) = 2 + t, y(t) = 1 - t, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - y - z - 1 = 0.$$