Nalezněte tečnou rovinu a normálu procházející bodem $\boldsymbol{A} = [1, 1, 1]$ k ploše zadané rovnicí

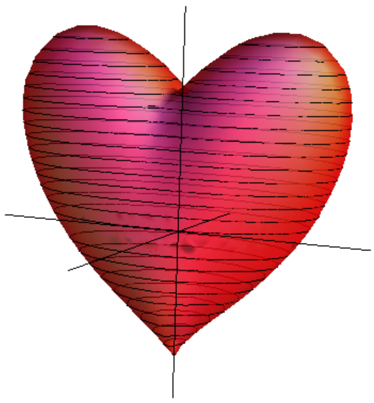
$$(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^3 = (7x^2 + y^2)z^3.$$

Řešení: Nejprve si rovnici převedeme do tvaru s nulovou pravou stranou

$$(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^3 - (7x^2 + y^2)z^3 = 0.$$

Levou stranu si označíme $F(x, y, z)$ a dále budeme postupovat analogicky s postupem hledání tečny a normály v případě $F(x, y) = 0$.

Před samotným výpočtem plochu vykreslíme. Z obr. **??** je jasně vidět, že popis takové plochy pomocí funkce nebo funkcí dvou proměnných by byl komplikovaný a že se tedy popis pomocí funkce implicitní opravdu vyplatí.



Obrázek 1: Plochy $(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^3 = (7x^2 + y^2)z^3$

Spočteme derivace a dosadíme do nich bod $\boldsymbol{A}$

$$F_x(x, y, z) = 6x\left(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4\right)^2 - 14xz^3, \qquad F_x(\boldsymbol{A}) = 10,$$
$$F_y(x, y, z) = 24y\left(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4\right)^2 - 2yz^3, \qquad F_y(\boldsymbol{A}) = 94,$$
$$F_z(x, y, z) = 6z\left(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4\right)^2 - 3z^2\left(7x^2 + y^2\right), \qquad F_z(\boldsymbol{A}) = 0.$$

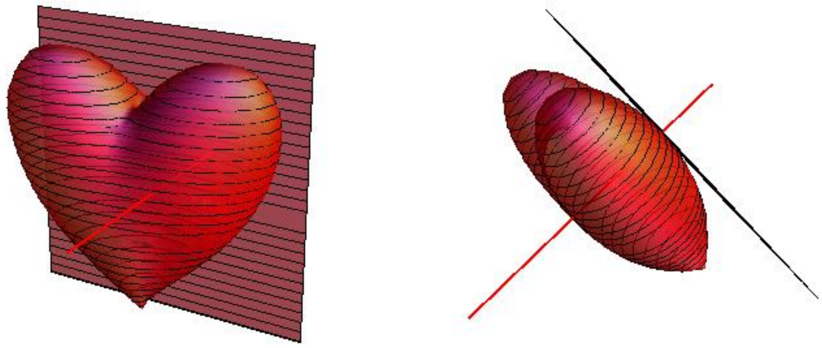
Vypočtené hodnoty použijeme ve vzorci tečné roviny

$$\tau: \; F_x(\boldsymbol{A})(x - x_0) + F_y(\boldsymbol{A})(y - y_0) + F_z(\boldsymbol{A})(z - z_0) = 0,$$
$$\tau: \; 10(x - 1) + 94(y - 1) + 0(z - 1) = 0,$$
$$\tau: \; 10x + 94y - 104 = 0. \quad \Rightarrow \quad \tau: \; 5x + 47y - 52 = 0.$$

Z koeficientů obecné rovnice roviny $ax + by + cz + d = 0$ lze určit normálový vektor $\boldsymbol{n} = [a, b, c]$. V našem případě má tvar $\boldsymbol{n} = [5, 47, 0]$, a protože hledaná normála prochází bodem $\boldsymbol{A} = [1, 1, 1]$ můžeme její rovnici parametricky zapsat jako

$$x(t) = 1 + 5t, \quad y(t) = 1 + 47t, \quad z(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Na závěr opět plochu vykreslíme. Na obr. **??** je zvolen také jiný úhel pohledu. V něm tečná rovina vypadá jako přímka (černá), na které je lépe patrno, jak se plochy dotýká. Červeně je pak zaznačena k ní kolmá normála.



Obrázek 2: Plochy $(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^3 = (7x^2 + y^2)z^3$ s tečnou rovinou a normálou

K implicitní funkci $z = z(x, y)$ určete tečnou rovinu τ v bodě $\boldsymbol{A}$.

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, -2, 3]$

(2) $xy + xz + yz + 1 = 0, , \quad \boldsymbol{A} = [1, 2, -1]$

(3) $xyz - x - y - z + 2 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, -1, 1]$

(4)
$\ln(xyz) - x - y - z - 1 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, -1, -1]\,.$

(5) $\sin(xyz) - x - z + 1 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, -1, 0]\,.$

(6)
$3 - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1, 1]\,.$

(7) $xyz + yz^2 + z^3 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [0, 1, -1]\,.$

(8) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{z}{xy}\right) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1, 0]\,.$

(9) $\dfrac{3x}{y} + \dfrac{2y}{z} + \dfrac{z}{x} = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1, -1]\,.$

(10)
$(x-y)^2 + (y-z)^2 - (z-x)^2 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, -1, -1]\,.$

(11)
$\ln(xyz + x + y + z) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 0, 0]\,.$

(12)
$\sin(xyz + x + y + z) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 0, -1]\,.$

(13) $1 - \mathrm{e}^{xy-z} = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1, 1]\,.$

(14) $x + y^2 + z^3 - xyz = 0, \quad \boldsymbol{A} = [-4, 2, 0]\,.$

(15) $4 - y^2z^2 + x^3(y + z), \quad \boldsymbol{A} = [0, 1, 2]\,.$

(16) $\left(2 - xy^2z^3\right)^2 - 1 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1, 1]\,.$

(17)
$\left(x + y^2 - z^3\right)^4 - xyz = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1, 1]\,.$

(18) $z \operatorname{arctg}(xy) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [0, 1, 1]\,.$

(19) $\ln\left(\dfrac{y + x}{z}\right) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 0, 1]\,.$

(20)
$\operatorname{tg}(x + y) + \operatorname{tg}(y + z) = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, -1, 1]\,.$

K implicitní funkci $z = z(x, y)$ určete tečnou rovinu τ v bodě $\boldsymbol{A}$.

(1) $\tau : x - 2y + 3z - 14 = 0.$

(2) $\tau : x + 3z + 2 = 0.$

(3) $\tau : x + z - 2 = 0.$

(4) $\tau : y + z + 2 = 0.$

(5) $\tau : x + 2z - 1 = 0.$

(6) $\tau : x + y + z - 3 = 0.$

(7) $\tau : x - y - z = 0.$

(8) $\tau : z = 0.$

(9) $\tau : 4x - 5y - z = 0.$

(10) $\tau : y - z = 0.$

(11) $\tau : x + y + z - 1 = 0.$

(12) $\tau : x + z = 0.$

(13) $\tau : x + y - z - 1 = 0.$

(14) $\tau : x + 4y + 8z - 4 = 0.$

(15) $\tau : 2y + z - 4 = 0.$

(16) $\tau : x + 2y + 3z + 6 = 0.$

(17) $\tau : 3x + 7y - 10z = 0.$

(18) $\tau : x = 0.$

(19) $\tau : x + y - z = 0.$

(20) $\tau : x + 2y + z = 0.$