Napište rovnici roviny, v níž leží trojúhelník ABC s vrcholy $A = [1, 2, 3]$, $B = [3, 1, 2]$ a $C = [2, 3, 1]$. Dále spočtěte velikost jeho stran a vnitřních úhlů.

Řešení: Stranám přiřadíme vektory dané příslušnými vrcholy. Pro stranu $\boldsymbol{AB}$ to bude vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$, obdobně pro $\boldsymbol{AC}$ máme $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}$, a konečně $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}$. Máme tedy tři vektory

$$\boldsymbol{a} = [-1, 2, -1], \qquad \boldsymbol{b} = [1, 1, -2], \qquad \boldsymbol{c} = [2, -1, -1].$$

Začneme od konce. Délky stran se rovnají velikostem příslušných vektorů. Spočteme tedy jejich velikosti

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1 + 1} = \sqrt{6},\\
\|\boldsymbol{b}\| &= \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6},\\
\|\boldsymbol{c}\| &= \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Všechny strany mají stejnou velikost, jde tedy o rovnostranný trojúhelník. Zamyslíme-li se nad výpočtem velikosti vektorů a prohlédneme-li si pozorně složky $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$, vidíme, že stačilo počítat pouze jednou.

Budeme-li v přemýšlení pokračovat, zjistíme, že úhly počítat nemusíme vůbec. V rovnostranném trojúhelníku jsou všechny stejné a rovné $60°$.

Z důvodu procvičení si však velikosti úhlů α a β určíme. Začneme výpočtem skalárního součinu vektorů $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$, které odpovídají stranám svírajícím úhel α.

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + b_3 \cdot c_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) = 2 - 1 + 2 = 3.$$

Nyní již k výpočtu úhlu α:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\| \cdot \|\boldsymbol{c}\|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 1.0472 \cong 60°.$$

Stejně postupujeme v případě úhlu β:

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{c}\|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} = 2.0944 \cong 120°.$$

To je ovšem ve sporu s naším správným předpokladem, že velikosti všech úhlů budou rovny $60°$. Kde visí ten zakopaný pes? Ve volbě vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{c}$. Zatímco první z bodu $\boldsymbol{B}$ „vystupuje“, druhý do něj „vstupuje.“ Proto jsme nespočetli velikost úhlu β, aale jeho doplňku do úhlu přímého.[1] Změníme-li u vektoru $\boldsymbol{c}$ znaménko, dostaneme $\cos\beta = \frac{1}{2}$ a $\beta = 60°$, jak jsme předpokládali.

K získání rovnice roviny, v níž trojúhelník $\boldsymbol{ABC}$ leží, použijeme vektorového součinu, jehož výsledkem je vektor na oba násobené vektory kolmý, tj. vektor normálový. Dále pak víme, že v obecné rovnici roviny

$$\tau : ax + by + cz + d = 0$$

jsou koeficienty a, b, c složkami normálového vektoru $\boldsymbol{n}$ roviny τ.

Vynásobme proto vektorově $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ a to pomocí vzorce využívajícího determinant s vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$, které jsou rovny $\boldsymbol{i} = [1, 0, 0]$, $\boldsymbol{j} = [0, 1, 0]$ a $\boldsymbol{k} = [0, 0, 1]$.

[1] Nakreslete si obrázek :)

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = [3, 3, 3]\,.$$

Rovnice roviny, v níž leží náš trojúhelník, má tvar

$$\tau : 3x + 3y + 3z + d = 0.$$

Zbývá určit koeficient d. Za tím účelem do rovnice dosaďme některý z bodů roviny, např. $\boldsymbol{A}$, tak dostáváme $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + d = 0$ a odtud $d = -18$. Po vydělení 3 máme rovnici roviny τ ve tvaru

$$\tau : x + y + z - 6 = 0.$$

Vypočítejte vektorový součin $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Zjistěte, jaký úhel vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ svírají.

(1) $\boldsymbol{u} = [0, 2, -1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [7, -1, 2]\,.$

(2) $\boldsymbol{u} = [1, 2, -1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [5, -1, 0]\,.$

(3) $\boldsymbol{u} = [-2, 2, 0]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [3, 2, -1]\,.$

(4) $\boldsymbol{u} = [1, 2, -1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [1, 2, 1]\,.$

(5) $\boldsymbol{u} = [1, -2, -1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [1, 2, 1]\,.$

(6) $\boldsymbol{u} = [1, -2, -1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [1, -1, 5]\,.$

(7) $\boldsymbol{u} = [-2, -2, -3]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, -1, -3]\,.$

(8) $\boldsymbol{u} = [-2, -1, -3]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, -2, -3]\,.$

(9) $\boldsymbol{u} = [-1, -1, 1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, 2, 3]\,.$

(10) $\boldsymbol{u} = [-1, -1, 2]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-2, 1, 3]\,.$

(11) $\boldsymbol{u} = [3, -1, 2]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, 2, 3]\,.$

(12) $\boldsymbol{u} = [4, -1, 1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, 2, -3]\,.$

(13) $\boldsymbol{u} = [-6, -2, 1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, 1, -3]\,.$

(14) $\boldsymbol{u} = [2, -4, -1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [1, 2, 2]\,.$

(15) $\boldsymbol{u} = [10, 0, 1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [1, 0, 1]\,.$

(16) $\boldsymbol{u} = [1, 2, 1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, 3, -1]\,.$

(17) $\boldsymbol{u} = [1, -3, 1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [1, 0, 1]\,.$

(18) $\boldsymbol{u} = [1, 2, 1]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, -6, -1]\,.$

(19) $\boldsymbol{u} = [2, 2, 2]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, -6, -1]\,.$

(20) $\boldsymbol{u} = [2, 2, 2]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, -1, 0]\,.$

Vypočítejte vektorový součin $w = u \times v$. Zjistěte, jaký úhel vektory u, v a w svírají.

(1) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [3, -7, -14]$, $\cos\varphi = -0.243432$, $\varphi = 1.8167 \cong 104°5'21.1321''$.

(2) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-1, -5, -11]$, $\cos\varphi = 0.240192$, $\varphi = 1.32823 \cong 76°6'7.609\,51''$.

(3) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-2, -2, -10]$, $\cos\varphi = -0.188982$, $\varphi = 1.76092 \cong 100°53'36.2207''$.

(4) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [4, -2, 0]$, $\cos\varphi = 0.666667$, $\varphi = 0.841069 \cong 48°11'22.8664''$.

(5) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [0, -2, 4]$, $\cos\varphi = -0.666667$, $\varphi = 2.30052 \cong 131°48'37.1336''$.

(6) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-11, -6, 1]$, $\cos\varphi = -0.157135$, $\varphi = 1.72859 \cong 99°2'26.2717''$.

(7) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [3, -3, 0]$, $\cos\varphi = 0.950654$, $\varphi = 0.315459 \cong 18°4'28.0374''$.

(8) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-3, -3, 3]$, $\cos\varphi = 0.928571$, $\varphi = 0.380251 \cong 21°47'12.4415''$.

(9) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-5, 2, -3]$, $\cos\varphi = 0.308607$, $\varphi = 1.25707 \cong 72°1'28.9783''$.

(10) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-5, -1, -3]$, $\cos\varphi = 0.763763$, $\varphi = 0.701674 \cong 40°12'10.6772''$.

(11) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-7, -11, 5]$, $\cos\varphi = 0.0714286$, $\varphi = 1.49931 \cong 85°54'14.2425''$.

(12) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [1, 11, 7]$, $\cos\varphi = -0.566947$, $\varphi = 2.17359 \cong 124°32'15.3016''$.

(13) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [5, -19, -8]$, $\cos\varphi = 0.0470882$, $\varphi = 1.52369 \cong 87°18'3.776\,73''$.

(14) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-6, -5, 8]$, $\cos\varphi = -0.581914$, $\varphi = 2.19188 \cong 125°35'7.088\,84''$.

(15) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [0, -9, 0]$, $\cos\varphi = 0.773957$, $\varphi = 0.68573 \cong 39°17'21.8647''$.

(16) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-5, 0, 5]$, $\cos\varphi = 0.492366$, $\varphi = 1.05599 \cong 60^\circ 30' 13.6494''$.

(17) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [-3, 0, 3]$, $\cos\varphi = 0.426401$, $\varphi = 1.13029 \cong 64^\circ 45' 38.1534''$.

(18) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [4, 0, -4]$, $\cos\varphi = -0.927173$, $\varphi = 2.75759 \cong 157^\circ 59' 53.8308''$.

(19) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [10, 0, -10]$, $\cos\varphi = -0.749269$, $\varphi = 2.41775 \cong 138^\circ 31' 37.4365''$.

(20) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [2, -2, 0]$, $\cos\varphi = -0.816497$, $\varphi = 2.52611 \cong 144^\circ 44' 8.197\,14''$.