

Matematika I

Funkce jedné proměnné

1. Množiny a zobrazení

Definice 1.1.1: Množinou rozumíme soubor prvků se společnou, tzv. **určující** vlastností.

Pomocí určující vlastnosti umíme rozhodnout, zdali daný prvek do dané množiny patří anebo nepatří. Množinu lze zadat buď výčtem prvků (explicitně řekneme, které prvky do dané množiny patří), nebo stanovením určující vlastnosti. Bývá zvykem množiny značit velkými písmeny.

Např. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ je množina nezáporných reálných čísel, je zjevné, že $3 \in A$ a $-3 \notin A$.

Poznámka: Značení číselných množin
přirozená čísla $\mathbb{N}$, celá čísla $\mathbb{Z}$, racionální čísla $\mathbb{Q}$, iracionální čísla $\mathbb{I}$, reálná čísla $\mathbb{R}$, komplexní čísla $\mathbb{C}$.

Definice 1.1.2: Kartézským součinem množin A a B rozumíme množinu

$$A \times B = \{[x, y] | x \in A, y \in B\},$$

prvky $[x, y]$ se nazývají **uspořádané dvojice**.

Definice 1.1.3: Relací (vztahem) ρ mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$, $\rho \subset A \times B$.

Definice 1.1.4: Zobrazení (speciální vztah) mezi množinami A a B je taková relace ρ mezi A a B , ve které ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in \rho$.

2. Reálné funkce jedné reálné proměnné

Definice 1.2.5: Funkcí f na množině $D \subseteq \mathbb{R}$ rozumíme každé zobrazení

$$f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x),$$

každému reálnému číslu $x \in D$ se přiřadí právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Proměnná x je **nezávislá proměnná**, y je **závislá proměnná** a předpis $y = f(x)$ vyjadřující závislost y na x se nazývá **funkční předpis**. Hodnotu funkce f v bodě x_0 označíme $f(x_0) = y_0$ a budeme ji nazývat **funkční hodnotou funkce f v bodě x_0** .

Definice 1.2.6: Množina D se nazývá **definiční obor** funkce f a značí se D_f nebo $D(f)$. Množina všech funkčních hodnot $f(x)$ se nazývá **obor hodnot** funkce f , značí se H_f nebo $H(f)$,

$$H_f = \{f(x) | x \in D_f\}.$$

Grafem funkce f je množina G_f ,

$$G_f = \{[x, f(x)] | x \in D_f\}.$$

Operace s funkcemi

Definice 1.2.7: Jsou dány funkce f a g s definičními obory D_f , D_g .

Rovnost funkcí: $f = g$

$$D_f = D_g \quad \text{a} \quad f(x) = g(x) \text{ pro každé } x \in D_f$$

Součet funkcí: $f + g$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ pro každé } x \in D_f \cap D_g$$

Rozdíl funkcí: $f - g$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ pro každé } x \in D_f \cap D_g$$

Operace s funkcemi

Součin funkcí: $f \cdot g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ pro každé } x \in D_f \cap D_g$$

Podíl funkcí: $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro každé } x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0$$

Ohraničené a neohraničené funkce

Definice 1.2.8: Funkce f se nazývá **ohraničená shora** na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, existuje-li takové číslo h , že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq h$.

Definice 1.2.9: Funkce f se nazývá **ohraničená zdola** na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, existuje-li takové číslo d , že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq d$.

Definice 1.2.10: Funkce f se nazývá **ohraničená** na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, je-li na M ohraničená shora i zdola. Není-li ohraničená ani shora ani zdola na M , nazývá se **neohraničená** na M .

Monotónnost funkcí, funkce rostoucí a klesající

Definice 1.2.11: Funkce f se nazývá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$

- **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:
je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:
je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$,
- **neklesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:
je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **nerostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:
je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Poznámka: Takové funkce se nazývají **monotonní** na intervalu I .

Poznámka: Funkce rostoucí a klesající na intervalu I se nazývají **ryze monotonní** na intervalu I .

Parita funkce, funkce sudá a lichá

Definice 1.2.12: Funkce f se nazývá **sudá**, jestliže platí:

pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$.

Definice 1.2.13: Funkce f se nazývá **lichá**, jestliže platí:

pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y , graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic, podle bodu $[0, 0]$.

Periodicita funkce

Definice 1.2.14: Funkce f se nazývá **periodická**, jestliže existuje takové číslo $p > 0$, že platí:

pro každé $x \in D_f$ platí $x + p \in D_f$ a $f(x + p) = f(x)$.

Číslo p se nazývá **perioda** funkce f . Existuje-li nejmenší číslo p , pak jej nazýváme **základní perioda** funkce f .

Poznámka: Graf periodické funkce se pravidelně opakuje po intervalech, jejichž délka je nejméně rovna základní periodě p .

Prostá funkce

Definice 1.2.15: Funkce f se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

$$\text{je-li } x_1 \neq x_2, \text{ pak } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Věta 1.2.16: *Každá ryze monotonní funkce je prostá.*

Poznámka: Opačné tvrzení neplatí.

Definice 1.2.17: Řekneme, že funkce h je **složená funkce** z funkcí f a g , jestliže platí:

$$D(h) = \{x \in D(f), f(x) \in D(g)\},$$

pro každé $x \in D(h)$ platí $h(x) = g(f(x))$.

Operaci skládání značíme symbolem $\circ$, tedy $h = g \circ f$, respektive $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Poznámka: Skládání funkcí není komutativní $g \circ f \neq f \circ g$.

Inverzní funkce

Definice 1.2.18: Inverzní funkce k prosté funkci $f(x)$ je funkce, která každému $y \in H(f)$ přiřadí právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$. Značíme ji f^{-1} .

Poznámka: Pro definiční obor a obor hodnot platí:

$$D(f^{-1}) = H(f) \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Dále platí:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Poznámka: Grafy funkce f a funkce inverzní f^{-1} jsou symetrické podle osy prvního a třetího kvadrantu, tj. podle přímky $y = x$. Inverzní funkce f^{-1} zachovává monotónnost funkce f .

3. Přehled elementárních funkcí

Elementární funkce

Základní elementární funkce jsou: $y = c$, $y = x$, $y = \sin x$, $y = e^x$; $c \in \mathbb{R}$.

Definice 1.3.19: Elementární funkcí nazveme každou funkci, která vznikne ze základních elementárních funkcí pomocí operací s funkcemi (součet, rozdíl, součin, podíl, skládání a invertování).

Elementární funkce jsou funkce:

- polynomy a obecně mocninné,
- exponenciální a logaritmické,
- goniometrické a cyklometrické,
- hyperbolické a hyperbolometrické, těmito funkcemi se zabývat nebudeme.

Polynomy

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Podrobně se budeme zabývat polynomy vybraných typů:

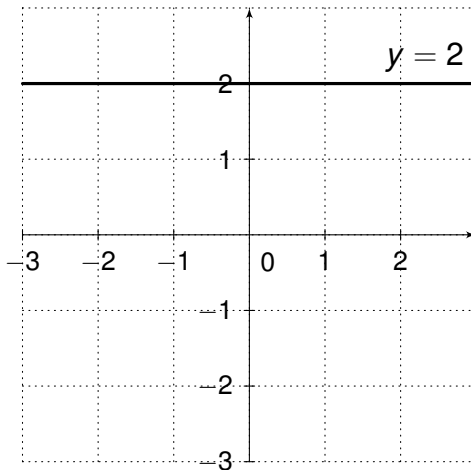
- konstantní funkce $y = a_0$, $n = 0$
- lineární funkce $y = a_0 + a_1 x$, $n = 1$, $a_1 \neq 0$
- kvadratické funkce $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $n = 2$, $a_2 \neq 0$
- mocninné funkce $y = x^n$, $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$

Elementární funkce - konstantní funkce

$$y = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

- $D_f = \mathbb{R}, H_f = \{a\}$
- grafem je přímka rovnoběžná s osou x protínající na ose y bod $[0, a]$
- funkce je ohraničená, je současně nerostoucí a neklesající, sudá (je-li $a = 0$, je současně lichá), periodická (základní perioda neexistuje), není prostá

Elementární funkce - konstantní funkce

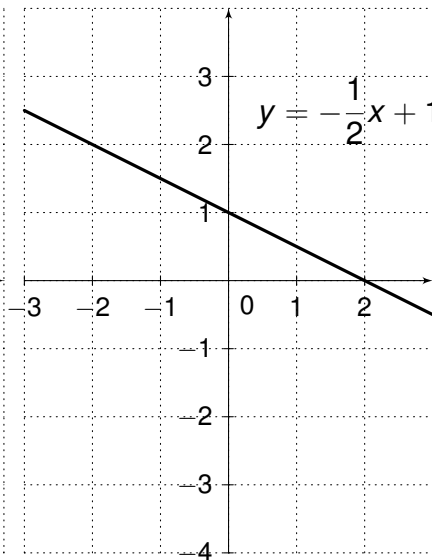
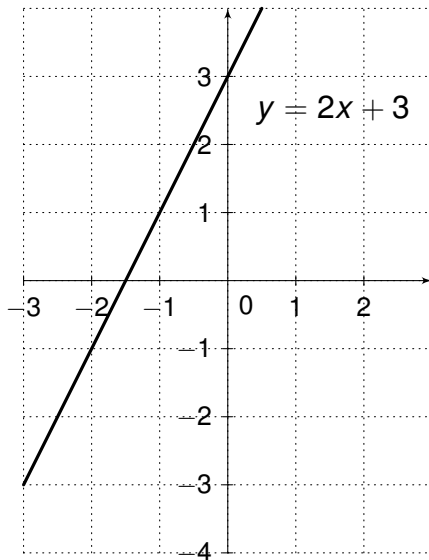


Elementární funkce - lineární funkce

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

- $D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}$
- grafem je přímka, která v bodě $[0, b]$ protíná osu y
- funkce je neohraničená, rostoucí pro $a > 0$, klesající pro $a < 0$, není sudá, je lichá pro $b = 0$, není periodická, je prostá

Elementární funkce - lineární funkce



Elementární funkce - kvadratické funkce

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

- $D_f = \mathbb{R}$, H_f závisí na funkčním předpisu
- není periodická, není prostá, speciálně pro $b = 0$ je funkce $y = ax^2 + c$ sudá

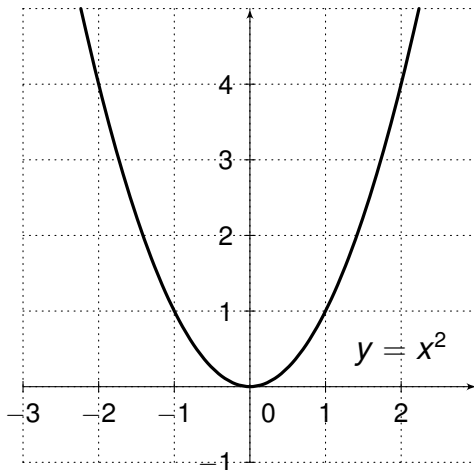
Grafem je parabola, která má vrchol v bodě $\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$ a v bodě $[0, c]$ protíná osu y .

Elementární funkce - kvadratické funkce

Průsečíky s osou x jsou řešením kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Z hlediska diskriminantu $D = b^2 - 4ac$ rozlišujeme tři případy:

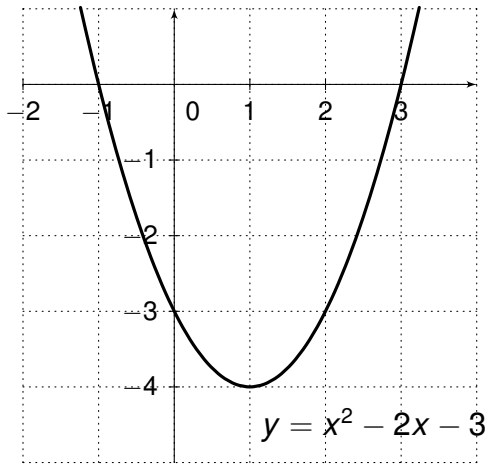
- $D > 0$ existují dva průsečíky $\left[\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, 0 \right], \left[\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, 0 \right]$
- $D = 0$ existuje jeden průsečík $\left[\frac{-b}{2a}, 0 \right]$
- $D < 0$ průsečík neexistuje

Elementární funkce - kvadratické funkce



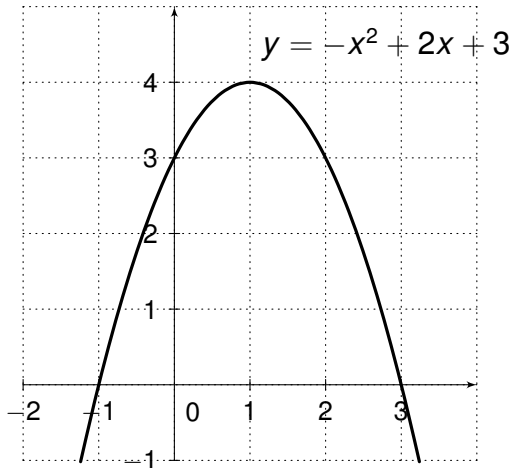
Elementární funkce - kvadratické funkce

pro $a > 0$ má parabola konvexní tvar, funkce je ohraničená zdola



Elementární funkce - kvadratické funkce

pro $a < 0$ má parabola konkávní tvar, funkce je ohraničená shora



Elementární funkce - mocninné funkce

$$y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

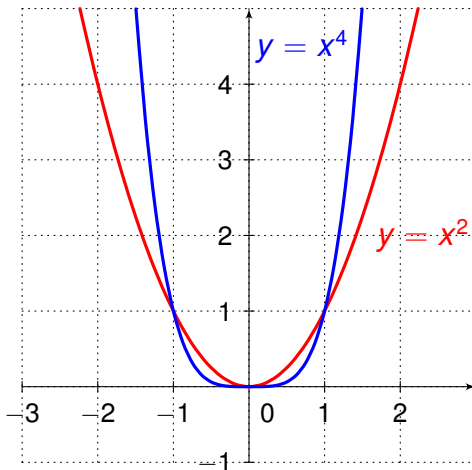
- $D_f = \mathbb{R}$

pro n **sudé**:

- $H_f = \langle 0, \infty \rangle$

- funkce jsou ohraničené zdola, jsou sudé, nejsou prosté

Elementární funkce - mocninné funkce



Elementární funkce - mocninné funkce

$$y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

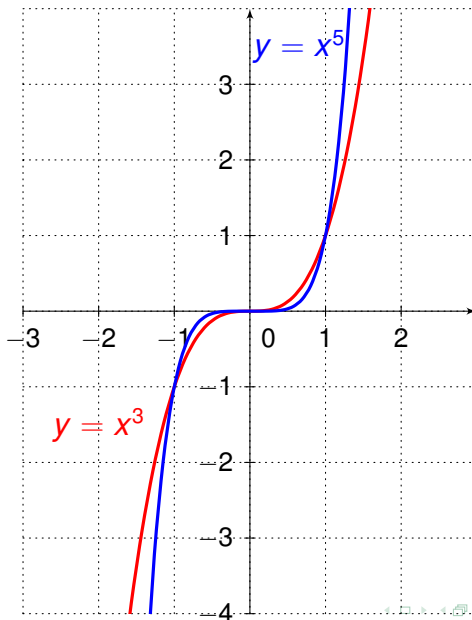
- $D_f = \mathbb{R}$

pro n **liché**:

- $H_f = \langle 0, \infty \rangle$

- funkce jsou ohraničené zdola, jsou sudé, nejsou prosté

Elementární funkce - mocninné funkce



Racionální funkce

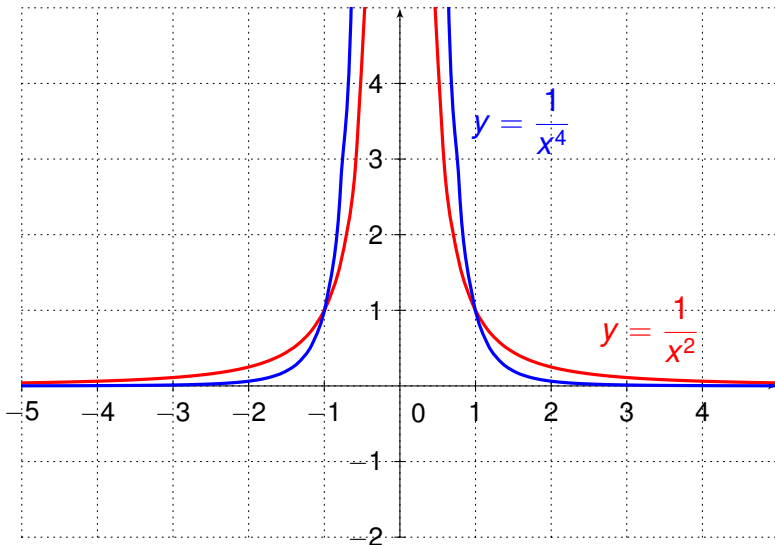
$$y = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Speciálně pro n **sudé**:

- $H_f = (0, \infty)$
- funkce jsou ohraničené zdola, sudé, nejsou prosté

Elementární funkce - mocninné funkce



Racionální funkce

$$y = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

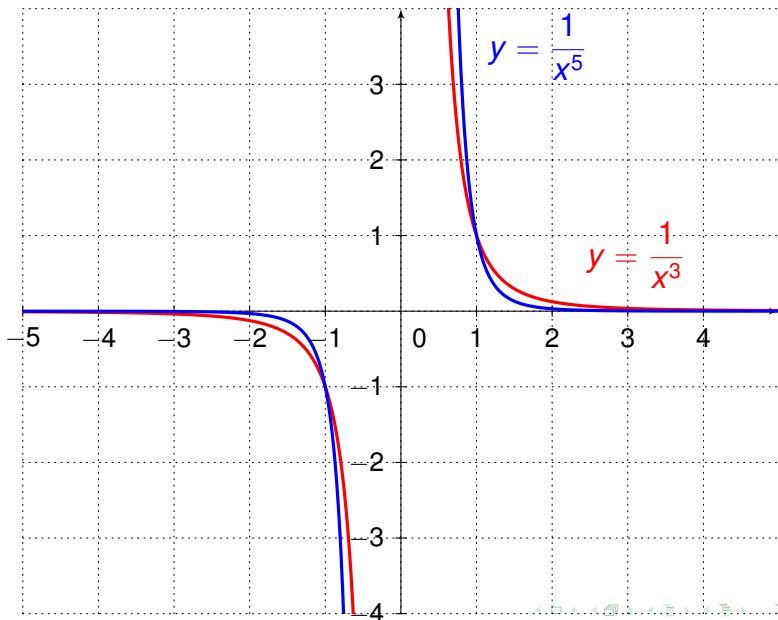
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Speciálně pro n **liché**:

- $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- funkce jsou neohraničené, liché, jsou prosté

Elementární funkce - mocninné funkce



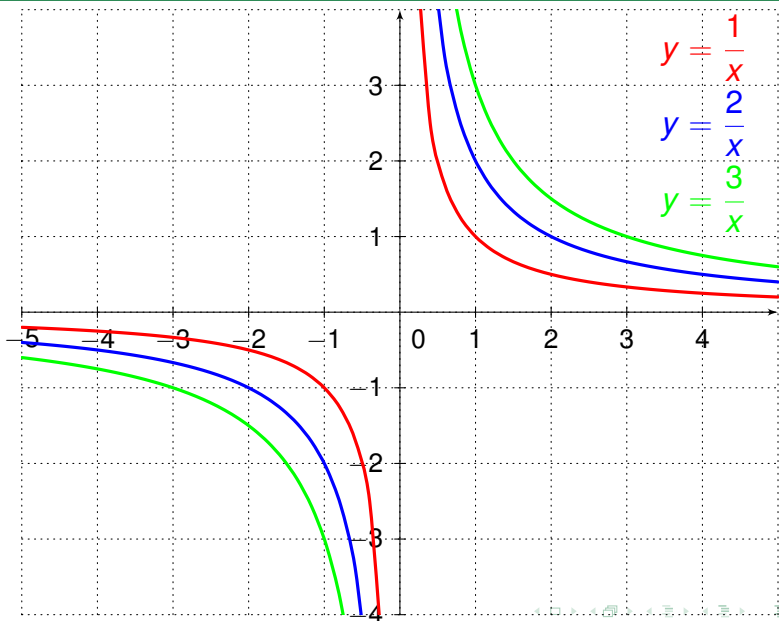
Elementární funkce - lineárně lomené funkce

$$y = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- grafem jsou hyperboly, osy x , y jsou asymptoty hyperbol a střed je bod $[0, 0]$
- funkce jsou neohraničené, liché, prosté

pro $k > 0$ leží větve hyperbol v I. a III. kvadrantu, klesají na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$

Elementární funkce - lineárně lomené funkce



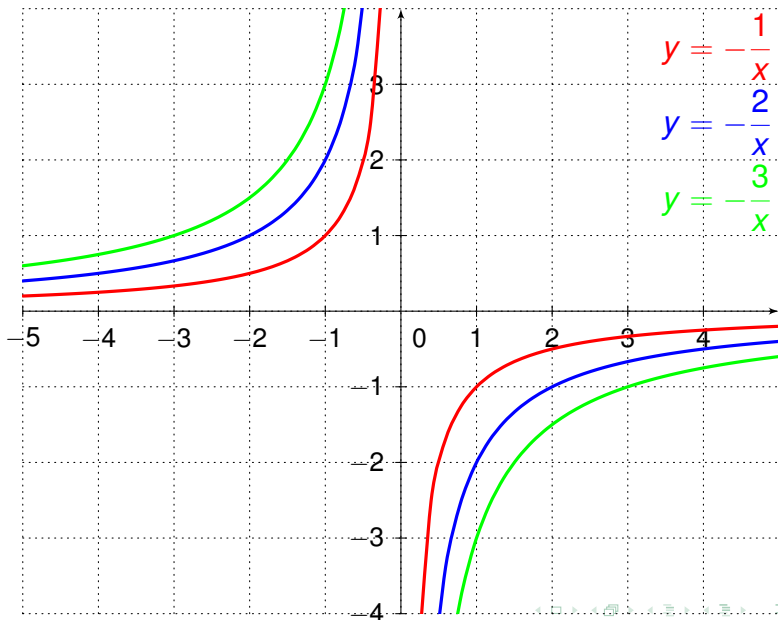
Elementární funkce - lineárně lomené funkce

$$y = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- grafem jsou hyperboly, osy x , y jsou asymptoty hyperbol a střed je bod $[0, 0]$
- funkce jsou neohraničené, liché, prosté

pro $k < 0$, leží větve hyperbol ve II. a IV. kvadrantu, rostou na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$

Elementární funkce - lineárně lomené funkce



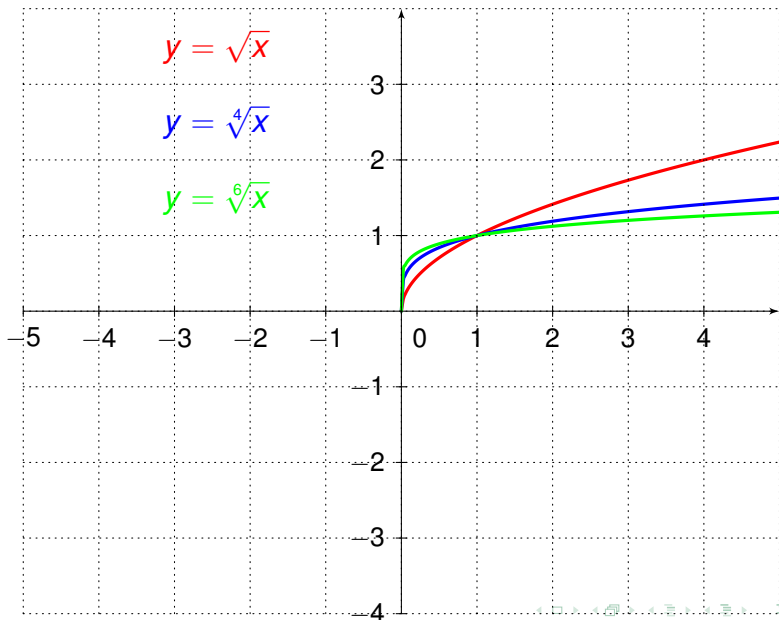
Elementární funkce - iracionální funkce

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Speciálně pro n **sudé**:

- $D_f = \langle 0, \infty \rangle, H_f = \langle 0, \infty \rangle$
- funkce jsou ohraničené zdola, prosté, rostoucí

Elementární funkce - iracionální funkce



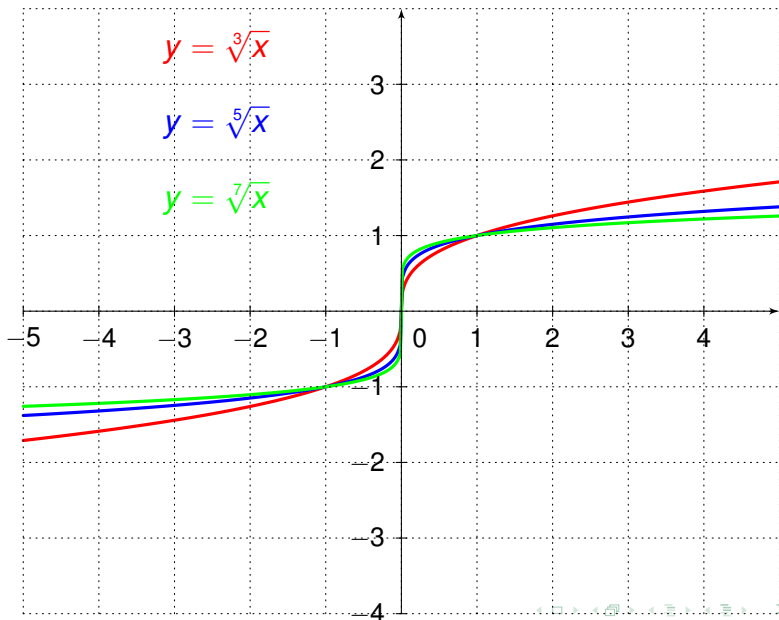
Elementární funkce - iracionální funkce

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Speciálně pro n **liché**:

- $D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}$
- funkce jsou prosté, liché, neohraničené

Elementární funkce - iracionální funkce

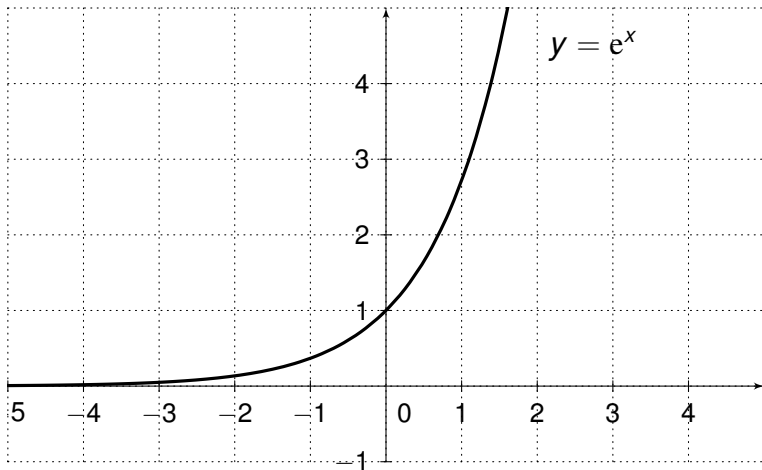


Elementární funkce - exponenciální funkce

$$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

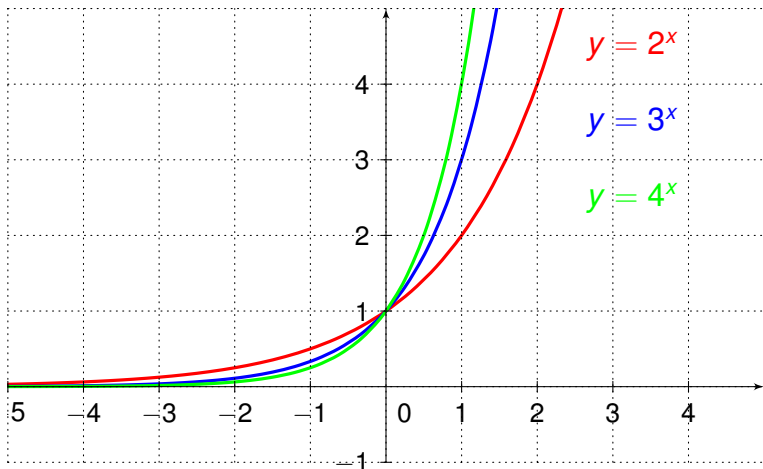
- $D_f = \mathbb{R}, H_f = (0, \infty)$
- číslo a se nazývá **základ** exponenciální funkce
- grafy protínají osu y v bodě $[0, 1]$
- funkce jsou ohraničené zdola, nejsou ani sudé ani liché
- funkce jsou prosté (inverzní funkce jsou funkce logaritmické)
- speciálně: Je-li základem Eulerovo číslo $e = 2,71828 \dots$ pak funkce $y = e^x$ se nazývá **přirozená exponenciální funkce**.

Elementární funkce - exponenciální funkce



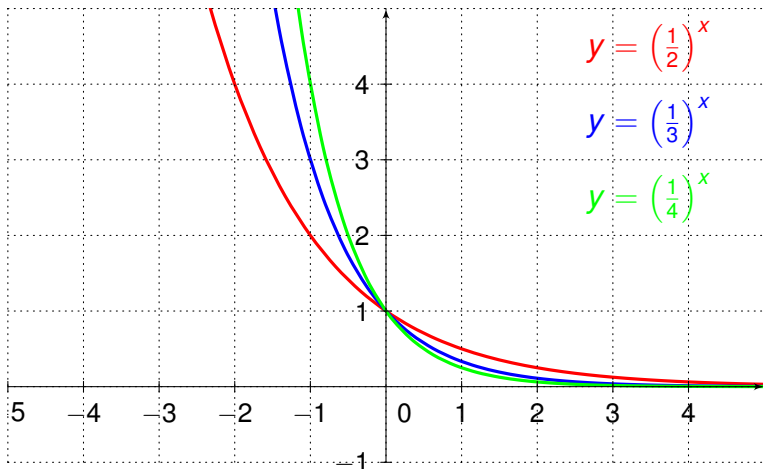
Elementární funkce - exponenciální funkce

je-li $a > 1$, jsou funkce rostoucí



Elementární funkce - exponenciální funkce

je-li $0 < a < 1$, jsou funkce klesající

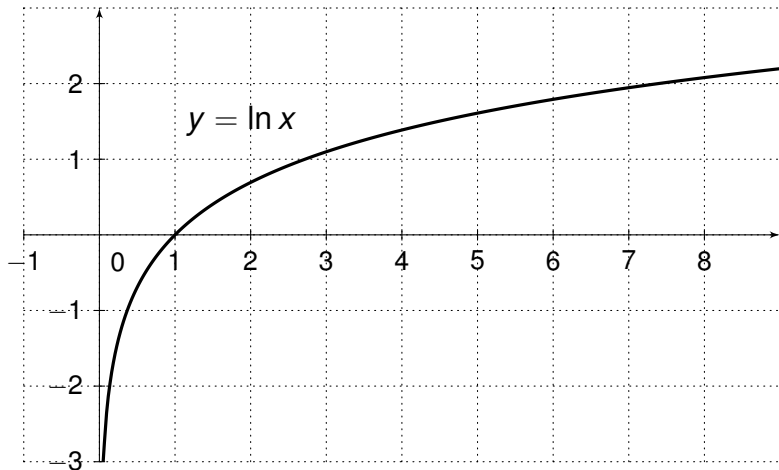


Elementární funkce - logaritmické funkce

$$y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$$

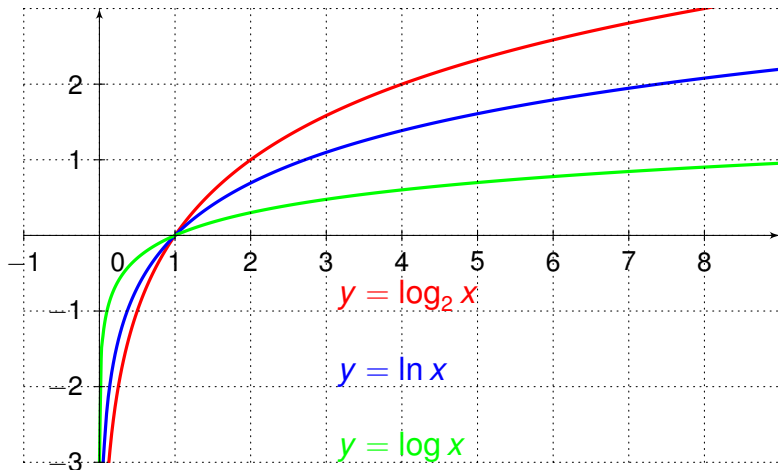
- $D_f = (0, \infty)$, $H_f = \mathbb{R}$
- číslo a se nazývá **základ** logaritmické funkce
- grafy protínají osu x v bodě $[1, 0]$
- funkce jsou neohraničené, nejsou ani sudé ani liché,
- funkce jsou prosté (logaritmické funkce jsou inverzní k exponenciálním)
- speciálně: Je-li základem Eulerovo číslo e , pak $y = \log_e x = \ln(x)$ a nazývá se **přirozený logaritmus**.
- Je-li základem číslo 10, pak $y = \log_{10} x = \log x$ a nazývá se **dekadický logaritmus**.

Elementární funkce - logaritmické funkce



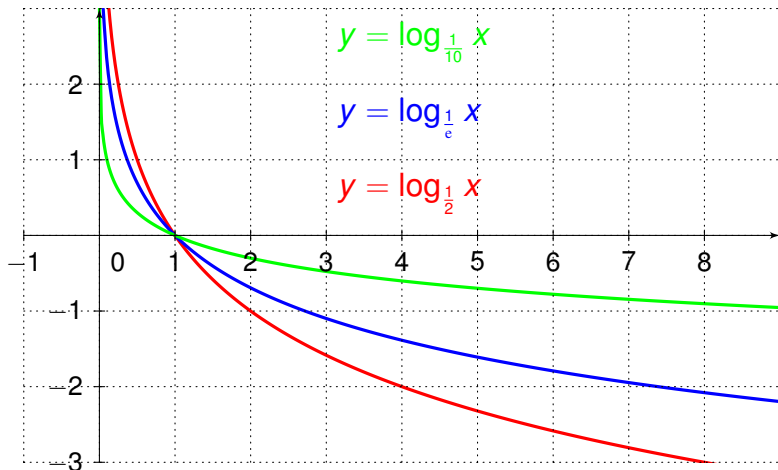
Elementární funkce - logaritmické funkce

je-li $a > 1$, jsou funkce rostoucí



Elementární funkce - logaritmické funkce

je-li $0 < a < 1$, jsou funkce klesající

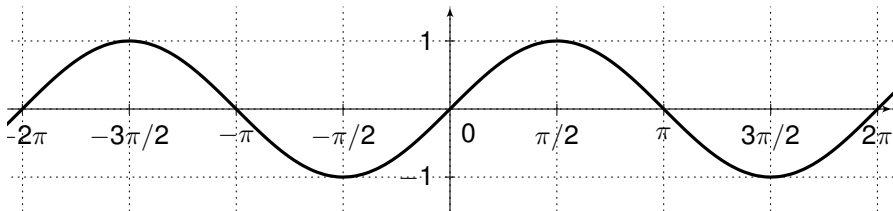


Funkce sinus

$$y = \sin x$$

- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -1, 1 \rangle$
- funkce je periodická s periodou $p = 2\pi$
- funkce je ohraničená, je lichá, není prostá
- funkce je rostoucí na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- funkce je klesající na intervalu $\langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Elementární funkce - goniometrické funkce

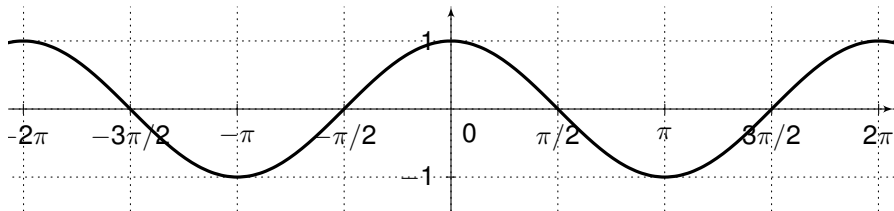


Funkce kosinus

$$y = \cos x$$

- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -1, 1 \rangle$
- funkce je periodická s periodou $p = 2\pi$
- funkce je ohraničená, je sudá, není prostá
- funkce je rostoucí na intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- funkce je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Elementární funkce - goniometrické funkce

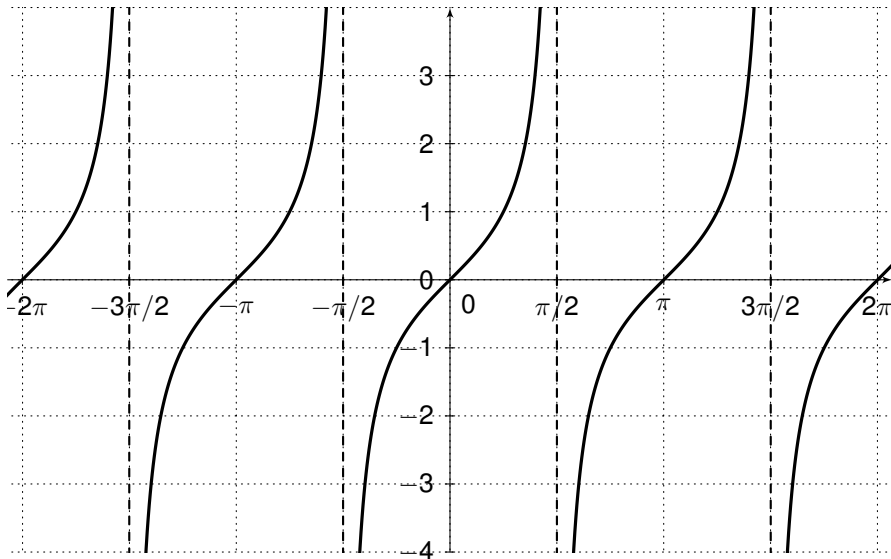


Funkce tangens

$$y = \tan x$$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}, H_f = \mathbb{R}$
- funkce je periodická s periodou $p = \pi$
- funkce je neohraničená, je lichá, není prostá
- funkce je rostoucí na intervalu $(-\pi/2, \pi/2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Elementární funkce - goniometrické funkce

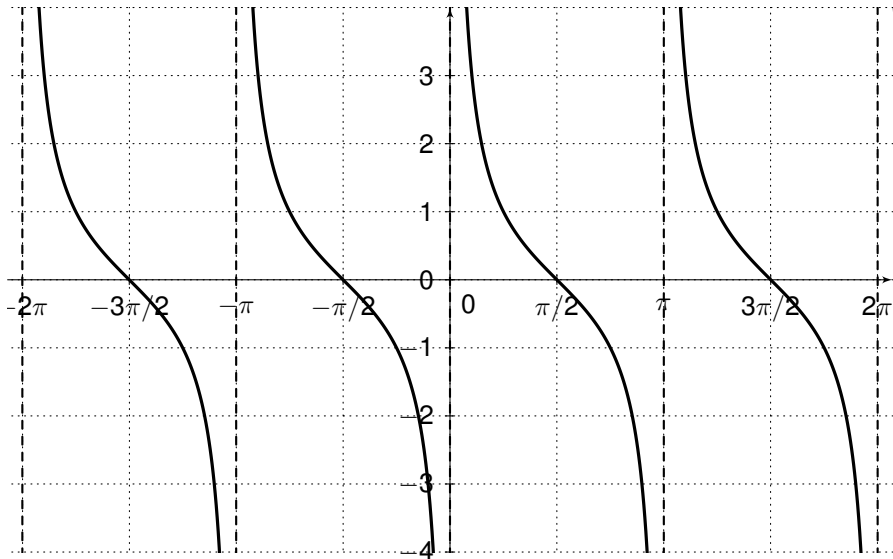


Funkce kotangens

$$y = \cot x$$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, H_f = \mathbb{R}$
- funkce je periodická s periodou $p = \pi$
- funkce je neohraničená, je lichá, není prostá
- funkce je klesající na intervalu $(0, \pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Elementární funkce - goniometrické funkce

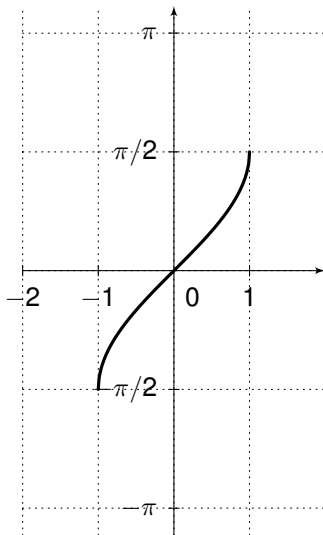


Funkce arkussinus

$$y = \arcsin x$$

- inverzní k funkci $y = \sin x$ omezené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- $D_f = \langle -1, 1 \rangle$, $H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- funkce je ohraničená, lichá, prostá, rostoucí

Elementární funkce - cyklometrické funkce

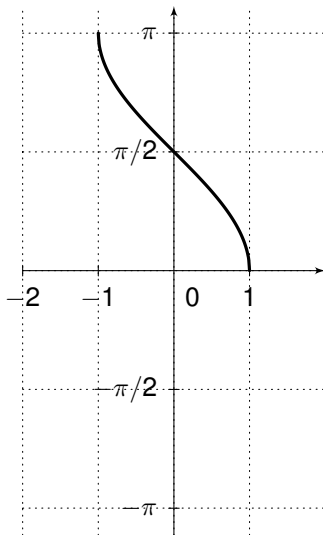


Funkce arkuskosinus

$$y = \arccos x$$

- inverzní k funkci $y = \cos x$ omezené na interval $\langle 0, \pi \rangle$
- $D_f = \langle -1, 1 \rangle$, $H_f = \langle 0, \pi \rangle$
- funkce je ohraničená, prostá, klesající

Elementární funkce - cyklometrické funkce

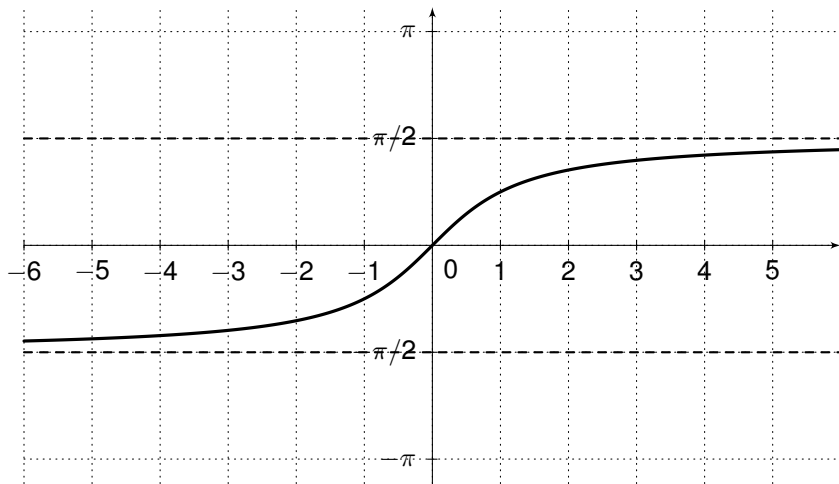


Funkce arkustangens

$$y = \arctan x$$

- inverzní k funkci $y = \tan x$ omezené na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- funkce ohraničená, lichá, prostá, rostoucí

Elementární funkce - cyklometrické funkce

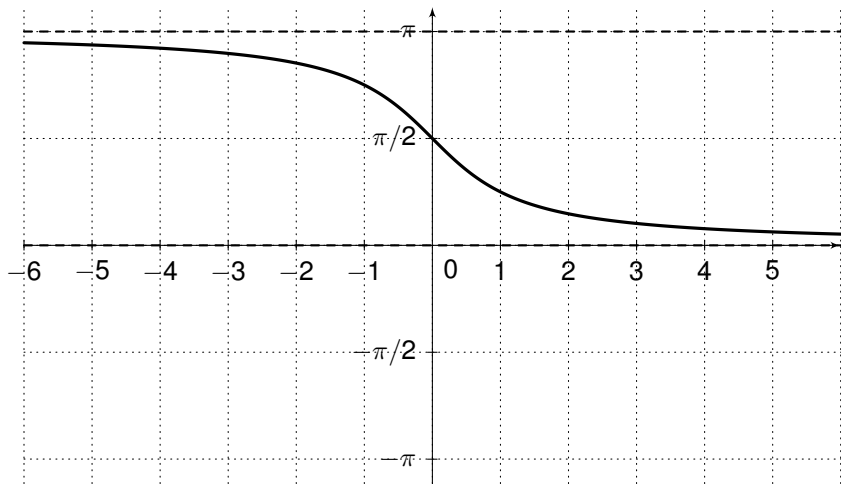


Funkce arkuskotangens

$$y = \operatorname{arccot} x$$

- inverzní k funkci $y = \cot x$ omezené na interval $(0, \pi)$
- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0, \pi)$
- funkce je ohraničená, prostá, klesající

Elementární funkce - cyklometrické funkce



4. Limita a spojitost

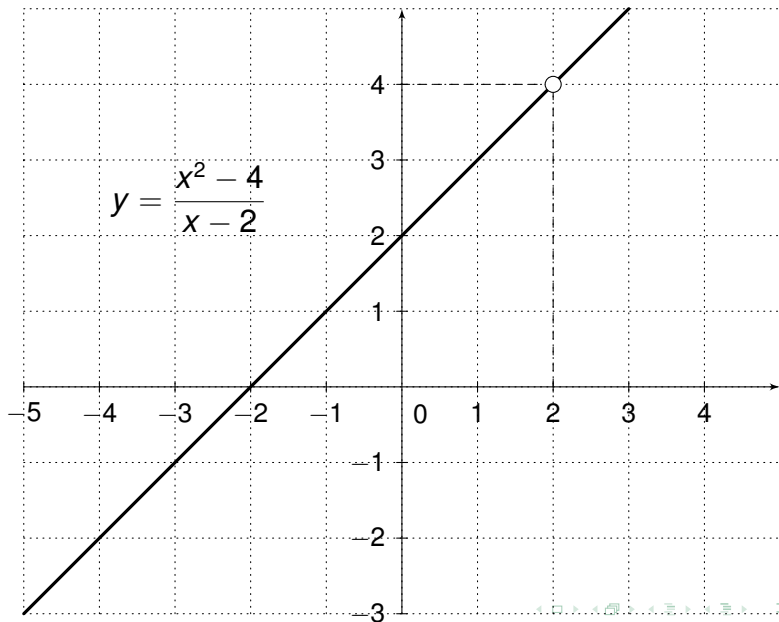
Limita funkce - motivace

Budeme vyšetřovat chování funkce f ,

$$f : y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

v „blízkosti“ bodu $x = 2$. Definiční obor funkce f je množina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Načrtneme graf funkce f .

Limity - motivace



Limity - motivace

$$f : y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Přibliž. zprava

x	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	...	2
$f(x)$								

Přibliž. zleva

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2
$f(x)$								

Rozšíření množiny reálných čísel

Definice 1.4.20: Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšíříme o prvky $\infty, -\infty$ a nazveme **rozšířenou množinou reálných čísel** $\mathbb{R}^*$:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme **nevlastní body**, body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **vlastní body**.

Rozšíření množiny reálných čísel

Vlastnosti množiny $\mathbb{R}^*$

Pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí: $-\infty < c < \infty$

Součet a rozdíl

$$c + \infty = \infty \quad c - \infty = -\infty \quad \infty + \infty = \infty \quad -\infty - \infty = -\infty$$

Podíl $\frac{c}{\infty} = 0 \quad \frac{c}{-\infty} = 0$

Součin

$$\infty \cdot \infty = \infty \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty \quad -\infty \cdot (-\infty) = \infty$$

$$\text{pro } c > 0 \text{ platí } c \cdot \infty = \infty \quad c \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\text{pro } c < 0 \text{ platí } c \cdot \infty = -\infty \quad c \cdot (-\infty) = \infty$$

Další operace definujeme pomocí komutativnosti sčítání a násobení.

Rozšíření množiny reálných čísel

Poznámka: Výrazy

$$„\frac{0}{0}“, „\frac{\infty}{\infty}“, „0 \cdot \infty“, „\infty - \infty“, „0^0“, „\infty^0“, „0^\infty“, „1^\infty“$$

nejsou definovány a nazývají se **neurčité výrazy**. Neurčitost budeme zvýrazňovat pomocí uvozovek.

Definice 1.4.21: Okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme interval bodů, které mají od bodu x_0 vzdálenost menší než δ , tedy:

$$O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Prstencovým okolím bodu nazveme množinu $O(x_0) \setminus \{x_0\}$, značíme $P(x_0)$.

$$P(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

Okolím bodu ∞ rozumíme libovolný interval tvaru (A, ∞) , kde A je reálné číslo:

$$O(\infty) = (A, \infty)$$

Okolím bodu $-\infty$ rozumíme libovolný interval tvaru $(-\infty, A)$, kde A je reálné číslo:

$$O(\infty) = (-\infty, A)$$

Poznámka: Prstencová okolí bodu $\pm\infty$ jsou stejná jako okolí

Jednostranné okolí bodu

Definice 1.4.22: Pravým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme interval:

$$O^+(x_0) = \langle x_0, x_0 + \delta \rangle$$

Levým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme interval:

$$O^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0]$$

Pravým (levým) prstencovým okolím bodu nazveme interval:

$$P^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta) \quad P^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$$

Definice 1.4.23: Nechť je dána funkce f a body $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $L \in \mathbb{R}^*$. Nechť je funkce f definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu x_0 . Řekneme, že **funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou L** , jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro libovolné $x \in P(x_0)$ leží hodnota $f(x)$ v $O(L)$. Značíme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Poznámka: Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ řekneme že má funkce **vlastní (konečnou) limitu**.

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ řekneme že má funkce **nevlastní (nekonečnou) limitu**.

Pokud $x_0 = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R}$ řekneme že má funkce **vlastní (konečnou) limitu v nevlastním bodě**.

Pokud $x_0 \neq \pm\infty$, $L = \pm\infty$ řekneme že má funkce **nevlastní (nekonečnou) limitu v nevlastním bodě**.

Jednostranná limita funkce

Definice 1.4.24: Nechť je dána funkce f a body $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $L \in \mathbb{R}^*$. Nechť je funkce f definovaná na nějakém pravém (resp. levém) prstencovém okolí bodu x_0 . Řekneme, že **funkce f má v bodě a limitu zprava (resp. zleva) rovnou L** , jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje pravé (resp. levé) prstencové okolí $P^+(x_0)$ (resp. $P^-(x_0)$) bodu x_0 takové, že pro libovolné $x \in P^+(x_0)$ (resp. $P^-(x_0)$) leží hodnota $f(x)$ v $O(L)$. Značíme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L)$$

Věta 1.4.25: *Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu.*

Poznámka: Má i nejvýše jednu limitu zleva a nejvýše jednu limitu zprava.

Věta 1.4.26: *Funkce f má v bodě x_0 limitu právě tehdy, má-li v tomto bodě limitu zprava i zleva a tyto limity se rovnají.*

Operace s limitami

Věta 1.4.27: *Necht' mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ limitu v bodě x_0 , pak platí:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

Věta 1.4.28: *Nechť je dána složená funkce $y = g(f(x))$ a necht' dále $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ a existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že $f(x) \neq a$ pro každé $x \in P(x_0)$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = c.$$

Věta 1.4.29: *Věta o dvou limitách*

Jestliže pro funkce f a g platí $f(x) = g(x)$ pro všechna x z definičního oboru D_f kromě bodu $x = x_0$, a jestliže existuje limita L funkce f v bodě x_0 , pak i funkce g má v bodě x_0 stejnou limitu L ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

Věta 1.4.30: *Věta o třech limitách*

Jestliže funkce f a g mají v bodě $x = x_0$ limitu L a pro funkci h platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$$

Typ limity $\frac{a}{0}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{0} = \begin{cases} \infty & (a > 0, g(x) > 0) \vee (a < 0, g(x) < 0) \\ -\infty & (a > 0, g(x) < 0) \vee (a < 0, g(x) > 0) \end{cases}$$

Limity některých elementárních funkcí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

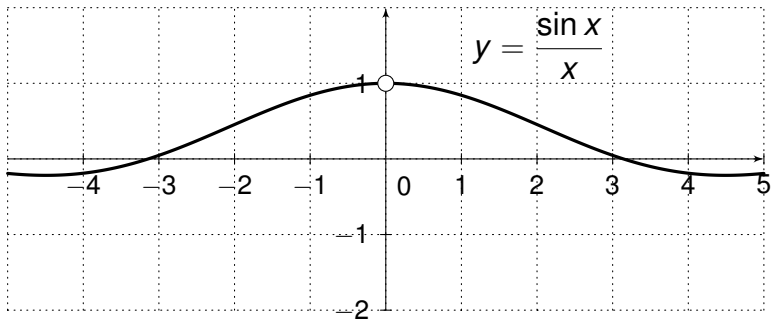
Některé další důležité limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

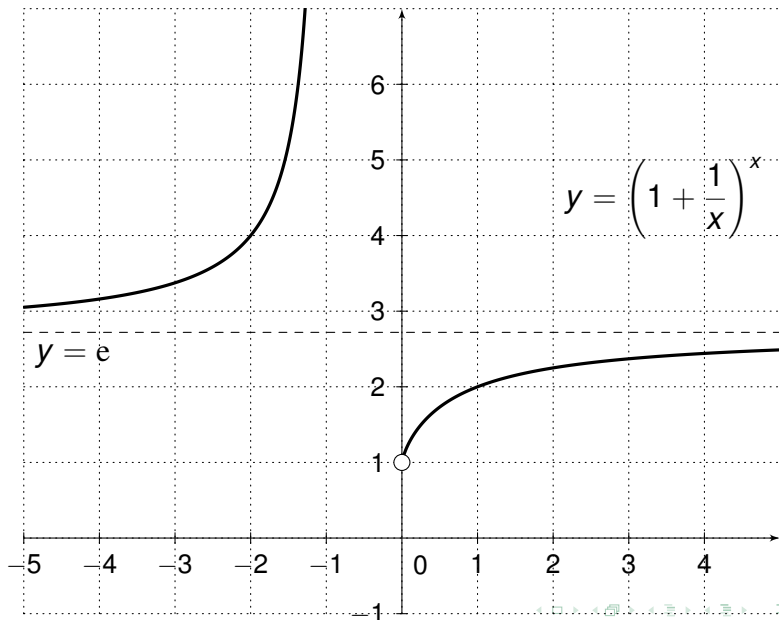
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(kx)}{kx} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \text{ kde } k \in \mathbb{R}$$

Vybrané limity



Vybrané limity



Definice 1.4.31: Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu x_0 a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

pak řekneme, že **funkce f je spojitá v bodě x_0 .**

Poznámka: Obdobně definujeme spojitost zprava nebo zleva.

Definice 1.4.32: Nechť $I \subseteq D_f$, řekneme, že **funkce je spojitá na intervalu I** , je-li spojitá v každém bodě intervalu I . Patří-li do intervalu dolní mez intervalu, je v něm spojitá zprava, a patří-li do něj horní mez intervalu, je v něm spojitá zleva.

Věta 1.4.33: *Všechny elementární funkce jsou spojité na svém definičním oboru.*

Bod, ve kterém funkce není spojitá, nazýváme **bod nespojitosti**.

Věty o spojitých funkcích

Věta 1.4.34: (Weierstrassova)

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak f je na tomto intervalu ohraničená.

Poznámka: Funkce f nabývá na intervalu svého minima a maxima.

Věta 1.4.35: (Bolzanova-Cauchyho)

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $f(a) \neq f(b)$. Číslo c leží mezi hodnotami $f(a)$ a $f(b)$. Pak existuje aspoň jedno $x_0 \in (a, b)$, pro které platí $f(x_0) = c$.

Poznámka: Zvolme $c = 0$.

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ opačná znaménka, pak existuje aspoň jedno $x_0 \in (a, b)$, pro které platí $f(x_0) = 0$.

Matematika I

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

1. Diferenciální počet

Definice derivace

Definice 2.1.36: Je dána funkce f a bod $x_0 \in D_f$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pak ji nazveme **derivací funkce f v bodě x_0** a značíme ji $f'(x_0)$.

Věta 2.1.37: *Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce f , pak je v tomto bodě funkce f spojitá.*

Definice 2.1.38: Nechť je funkce f definována v každém bodě intervalu (a, b) a má v každém bodě derivaci $f'(x)$. Pak je na (a, b) definovaná funkce f' , která každému $x \in (a, b)$ přiřadí hodnotu $f'(x)$. Tuto funkci nazveme **derivace** funkce f . Značíme $f'(x)$, y' , $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

Poznámka: Má-li funkce f derivaci na intervalu I , pak říkáme, že je na I **diferencovatelná**.

Vlastnosti derivace

Věta 2.1.39: *Necht' funkce f a g mají na intervalu I derivaci. Pak na I platí:*

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

Derivace součtu, rozdílu

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Derivace součinu

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Derivace podílu

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \text{pro } g(x) \neq 0$$

Derivace elementárních funkcí

Derivace konstantní funkce

$$[c]' = 0$$

Derivace mocninné funkce

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$$

Derivace exponenciální funkce

$$[e^x]' = e^x \quad [a^x]' = a^x \cdot \ln a$$

Derivace logaritmické funkce

$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \quad [\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Derivace elementárních funkcí

Derivace goniometrických funkcí

$$\begin{aligned} [\sin x]' &= \cos x & [\tan x]' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ [\cos x]' &= -\sin x & [\cot x]' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Derivace cyklometrických funkcí

$$\begin{aligned} [\arcsin x]' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & [\arctan x]' &= \frac{1}{1+x^2} \\ [\arccos x]' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & [\operatorname{arccot} x]' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Derivace složené funkce

Věta 2.1.40: (derivace složené funkce)

Necht' existuje derivace $f'(x_0)$ a derivace $g'(f(x_0))$. Pak existuje derivace složené funkce $g(f(x))$ v bodě x_0 a platí:

$$[g(f(x_0))] = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Poznámka: Na intervalu I , kde existují příslušné derivace tedy platí:

$$y = g(f(x)) \Rightarrow y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Derivace složené funkce je rovna součinu derivace vnější funkce (s původním argumentem) a derivace vnitřní funkce.

Logaritmické derivování

Funkci $y = f(x)^{g(x)}$ nelze derivovat jako $y = x^n$ (neboť exponent není konstanta) ani jako $y = a^x$ (základ není konstanta). Funkci upravíme do tvaru, který umožní použít vzorce pro derivování. Funkci $y = f(x)^{g(x)}$ upravíme:

$$y = f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Nyní funkci v tomto tvaru zderivujeme:

$$\begin{aligned} y' &= \left[e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \right]' \\ &= e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right) \\ &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

Derivace vyšších řádů

Definice 2.1.41: Nechť má funkce $f'(x)$ derivaci na intervalu I . Pak funkci $[f'(x)]'$ nazveme **druhou derivací funkce f** a značíme $f''(x)$,

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Poznámka: Obdobně definujeme derivaci n -tého řádu

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

l'Hospitalovo pravidlo

l'Hospitalovo pravidlo se používá pro výpočet limit typu „ $\frac{0}{0}$ “
nebo „ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ “.

Věta 2.1.42: *Necht' $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $L \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$, a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,
pak existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tedy*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

l'Hospitalovo pravidlo

Poznámka: Limity vedoucí na neurčité výrazy typu

$$„0 \cdot \infty“, „\infty - \infty“, „0^0“, „\infty^0“, „0^\infty“, „1^\infty“$$

Ize převést na typ „ $\frac{0}{0}$ “ nebo „ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ “, a poté řešit l'Hospitalovým pravidlem.

Derivace parametricky zadané funkce

Definice 2.1.43: Jsou dány funkce $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in I$ je parametr. Nechť existuje ϕ^{-1} . Pak funkci

$$y = f(x) = \psi(\phi^{-1}(x))$$

nazveme **parametricky zadanou funkcí**.

Věta 2.1.44: Funkce f je dána parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in I$. Nechť $\phi(t)$ a $\psi(t)$ mají derivaci v každém bodě intervalu I . Pak **derivace parametricky zadané funkce** f je dána vztahem:

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\phi}(t)}$$

Poznámka: Derivaci podle t značíme tečkou, abychom ji odlišili od derivace podle x , kterou značíme čárkou.

Derivace parametricky zadané funkce

Věta 2.1.45: *Funkce f je dána parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in I$. Necht' $\phi(t)$ a $\psi(t)$ mají první a druhou derivaci v každém bodě intervalu I . Pak **druhá derivace parametricky zadané funkce f** je dána vztahem:*

$$y'' = \frac{\ddot{\psi}(t) \cdot \dot{\phi}(t) - \dot{\psi}(t) \cdot \ddot{\phi}(t)}{(\dot{\phi}(t))^3}$$

Diferenciál funkce

Definice 2.1.46: Řekneme, že funkce $y = f(x)$ je v bodě x_0 **diferencovatelná**, nebo má v tomto bodě **diferenciál**, jestliže je možné její přírůstek Δy na okolí bodu x_0 vyjádřit jako

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathcal{A}h + h\tau(h),$$

kde $\mathcal{A}$ je konstanta a $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$. Funkce f se nazývá **diferencovatelná**, je-li diferencovatelná v každém bodě $x \in D_f$.

Věta 2.1.47: *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0 , pak v bodě x_0 existuje derivace prvního řádu a platí*

$$\mathcal{A} = f'(x_0).$$

Poznámka: Číslo h představuje přírůstek na ose x , je zvykem tento přírůstek značit $h = dx$. Pro přírůstek na ose y v bodě x_0 při známé hodnotně dx pak dostáváme

$$\Delta y = f'(x_0)dx + dx\tau(dx).$$

Diferenciál funkce

Definice 2.1.48: Je-li funkce $y = f(x)$ diferencovatelná, nazýváme následující výraz **diferenciálem** funkce f ,

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

Věta 2.1.49: *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0 , pak je v tomto bodě spojitá.*

Věta 2.1.50: *Je-li derivace prvního řádu funkce f spojitá v x_0 , pak je funkce f v bodě x_0 diferencovatelná (a tedy i spojitá).*

Geometrický význam diferenciálu Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 při známém přírůstku dx je přírůstek na tečně sestrojené ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Poznámka:

- *Diferenciál funkce $y = f(x)$*

$$dy = f'(x)dx.$$

- *Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x_0*

$$dy(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

- *Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 při známém přírůstku dx ,*

$$dy(x_0)(dx) = f'(x_0)dx \in \mathbb{R}.$$

Diferenciál funkce

- *Diferenciál druhého řádu funkce $y = f(x)$*

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

- Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)(dx).$$

Tečna a normála

Definice 2.1.51: Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Přímku t , procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ a mající směrnici rovnu hodnotě derivace funkce f v x_0 nazveme **tečna ke grafu funkce f v bodě x_0** . Přímku n , procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ a kolmou k tečně nazveme **normála ke grafu funkce f v bodě x_0** .

Věta 2.1.52: *Tečna ke grafu funkce f v bodě x_0 je dána předpisem:*

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Normála ke grafu funkce f v bodě x_0 je daná předpisem:

$$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Tečna a normála

Poznámka: V bodě, ve kterém nemá funkce f derivaci, tečna neexistuje.

Poznámka: Rovnici tečny lze přímo odvodit z diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 ,

$$dy(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

přičemž $y_0 = f(x_0)$, a tedy

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Taylorův polynom

Pro aproximaci funkce f na okolí bodu x_0 se používá tzv. Taylorův polynom, což je polynom, který má vzhledem k funkci f v bodě x_0 stejné hodnoty derivací až do řádu n .

Definice 2.1.53: Nechť je dána funkce $f(x)$, která má v bodě $x_0 \in D_f$ derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$. Pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0)$$

nazveme **Taylorův polynom funkce f stupně n na okolí bodu x_0** .

Taylorův polynom

Poznámka

- Taylorův polynom je kombinací diferenciálů až do stupně n .
- Rozepíšeme-li diferenciály, dostáváme alternativní tvar Taylorova polynomu,

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

- Taylorův polynom prvního stupně je tečna ke grafu funkce f v bodě x_0 .
- V případě $x_0 = 0$ se Taylorův polynom nazývá **Maclaurinův polynom**.

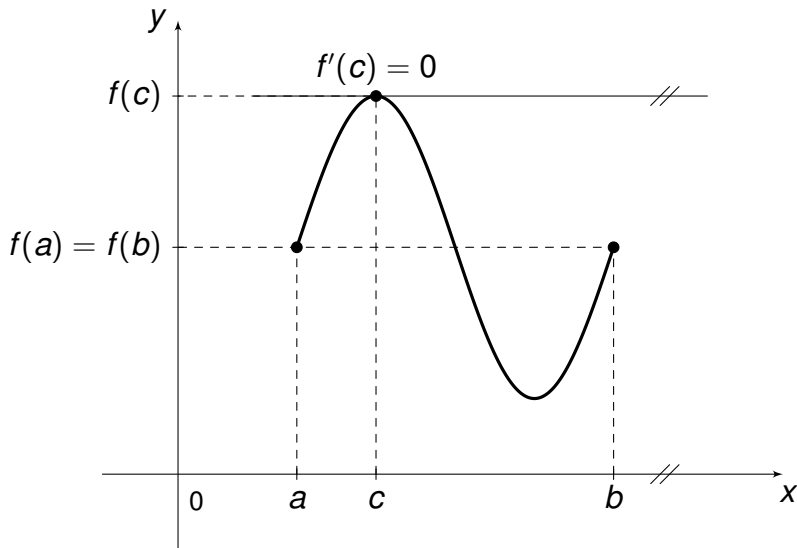
Věta 2.1.54: (Rolleova věta)

Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v intervalu (a, b) derivaci. Nechť dále platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje aspoň jedno $c \in (a, b)$ takové, že:

$$f'(c) = 0.$$

Poznámka: V bodě c je tečna rovnoběžná s osou x .

Věty o derivaci



Věta 2.1.55: (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

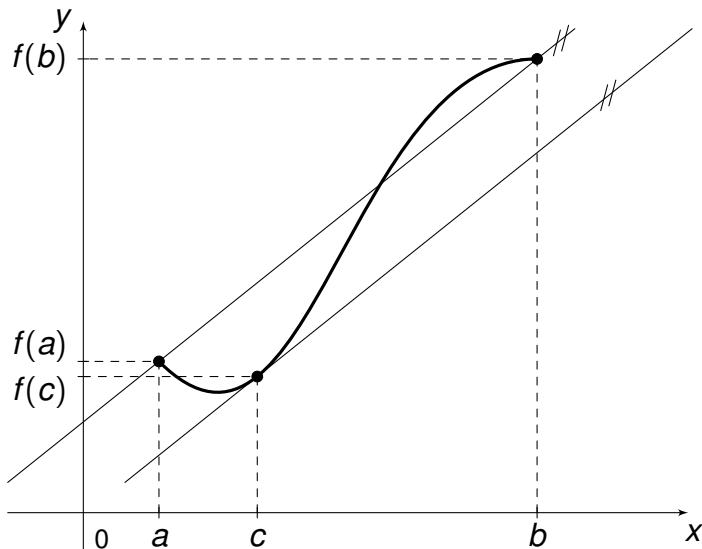
Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje aspoň jedno $c \in (a, b)$ takové, že:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Poznámka:

- V bodě c je tečna rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.
- Platí-li $f(a) = f(b)$ dostaneme Rolleovu větu.

Věty o derivaci



Věta 2.1.56: *Platí-li $f'(x_0) > 0$, pak je funkce f v bodě x_0 rostoucí. Platí-li $f'(x_0) < 0$, pak je funkce f v bodě x_0 klesající.*

Věta 2.1.57: *Nechť je funkce f definována na intervalu I . Platí-li na I $f'(x) > 0$, pak je funkce f na I rostoucí. Platí-li $f'(x) < 0$ na I , pak je funkce f na I klesající.*

Poznámka: Intervaly, na kterých je funkce rostoucí nebo klesající se nazývají **intervaly monotónnosti**.

Extrémy funkce

Definice 2.1.58: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum**, jestliže existuje takové okolí bodu x_0 , že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $f(x) \leq f(x_0)$. Platí-li $f(x) < f(x_0)$, pak řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **ostré lokální maximum**.

Definice 2.1.59: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum**, jestliže existuje takové okolí bodu x_0 , že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $f(x) \geq f(x_0)$. Platí-li $f(x) > f(x_0)$, pak řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **ostré lokální minimum**.

Poznámka: Má-li funkce v bodě lokální maximum nebo lokální minimum, říkáme, že má v bodě **lokální extrém**. Má-li funkce v bodě ostré lokální maximum nebo ostré lokální minimum, říkáme, že má v bodě **ostrý lokální extrém**.

Poznámka: Je-li okolím celý definiční obor funkce f , hovoříme o **globálních extrémech**.

Věta 2.1.60: (*nutná podmínka existence lokálního extrému*)

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace, pak platí

$$f'(x_0) = 0.$$

Poznámka: Funkce může mít lokální extrém pouze v bodech, ve kterých buď derivace neexistuje, nebo je derivace rovna nule.

Definice 2.1.61: Bod, ve kterém platí $f'(x_0) = 0$, nazveme **stacionárním bodem**.

Věta 2.1.62: (*postačující podmínka existence extrému*)

Nechť platí $f'(x_0) = 0$ a existuje druhá derivace $f''(x_0)$. Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální minimum. Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 lokální maximum.

Poznámka: V bodech, ve kterých je $f''(x) = 0$ nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout podle této věty, je nutné vyšetřit lokální chování funkce f na okolí bodu x_0 z definice.

Postup při určování lokálních extrémů - první derivace

- Určíme derivaci funkce a její definiční obor.
- Najdeme stacionární body.
- Stacionární body rozdělí definiční obor na intervaly. Na těchto intervalech rozhodneme o kladnosti resp. zápornosti derivace. Kladná derivace indikuje rostoucí funkci, záporná klesající.
- Lokální maximum je v bodech, ve kterých funkce přechází z rostoucí na klesající. Lokální minimum je v bodech, ve kterých funkce přechází z klesající na rostoucí.

Konvexnost a konkávnost

Definice 2.1.63: Necht má funkce f derivaci v bodě x_0 . Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 **konvexní (resp. konkávní)**, jestliže existuje okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí je graf funkce f nad (resp. pod) tečnou sestrojenou ke grafu funkce f v bodě x_0 ,

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

resp.

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definice 2.1.64: Řekneme, že funkce f je **konvexní (resp. konkávní) na intervalu** $I \subset D_f$, jestliže je konvexní (resp. konkávní) v každém bodě intervalu I .

Konvexnost a konkávnost

Věta 2.1.65: *Nechť $f''(x_0) > 0$, pak je f v bodě x_0 konvexní.
Nechť $f''(x_0) < 0$, pak je f v bodě x_0 konkávní.*

Definice 2.1.66: Nechť má funkce f derivaci v bodě x_0 .
Přechází-li graf funkce f v bodě x_0 z polohy pod tečnou do polohy nad tečnou (nebo naopak) nazveme bod x_0 **inflexním bodem** funkce $f(x)$.

Věta 2.1.67: *(nutná podmínka existence inflexního bodu)*
Je-li x_0 inflexní bod funkce f a má-li f v tomto bodě druhou derivaci, pak

$$f''(x_0) = 0.$$

Poznámka: Funkce může mít inflexi pouze v bodech, ve kterých buď neexistuje druhá derivace, nebo je druhá derivace rovna nule.

Konvexnost a konkávnost

Věta 2.1.68: *Je-li f' spojitá v x_0 a druhá derivace f'' mění v x_0 znaménko, pak x_0 je inflexním bodem funkce f .*

Poznámka: Změna znaménka druhé derivace znamená změnu konvexnosti na konkávnost (nebo naopak).

Postup při určování inflexních bodů - druhá derivace

- Určíme druhou derivaci funkce a její definiční obor.
- Najdeme body, ve kterých je druhá derivace rovna nule.
- Tyto body rozdělí definiční obor na intervaly. Na těchto intervalech rozhodneme o kladnosti resp. zápornosti derivace. Kladná derivace indikuje konvexnost funkce, záporná konkávnost.
- Inflexní body jsou body, ve kterých derivace mění znaménko, tedy se mění charakter zakřivení funkce z konvexního na konkávní, nebo naopak.

Asymptoty

Asymptoty jsou přímky, ke kterým se „blíží“ graf funkce.

Definice 2.1.69: Nechť f je funkce. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptota se směrnicí** pro $x \rightarrow \infty$, jestliže existují vlastní limity,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx),$$

respektive je **asymptotou se směrnicí** pro $x \rightarrow -\infty$, jestliže existují vlastní limity,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx).$$

Definice 2.1.70: Nechť f je funkce. Řekneme, že přímka $x = x_0$ je **asymptota bez směrnice**, jestliže alespoň jedna jednostranná limita je nevlastní,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

Poznámka:

- Bod x_0 nepatří do definičního oboru funkce f . Pokud ano, asymptota bez směrnice v něm neexistuje.
- Je-li $D_f = \mathbb{R}$, asymptota bez směrnice neexistuje.
- Jestliže, existuje asymptota bez směrnice v bodě x_0 , říkáme, že funkce f na okolí x_0 vykazuje asymptotické chování.
- Asymptoty se směrnicí mohou být buď dvě různé přímky, přímka jediná, nebo asymptota se směrnicí neexistuje.
- Asymptoty do grafu funkce f vyznačujeme čárkovaně.

Sestavení grafu funkce

K sestavení grafu funkce je potřeba vyšetřit následující vlastnosti

- definiční obor funkce, nulové body, intervaly plus mínus
- sudost, lichost, periodicitu
- spojitost, asymptoty bez směrnice
- první derivace, její definiční obor, nulové (stacionární) body, intervaly plus mínus
- monotónnost
- lokální extrémy
- druhá derivace, její definiční obor, nulové body, intervaly plus mínus
- konvexnost, konkávnost, inflexe
- asymptoty se směrnicí
- graf, obor hodnot

Matematika I

Lineární algebra

1. Matice

Základní pojmy a definice

Definice 3.1.71: Množinu $I = \{1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{N}$ budeme nazývat **m -prvkovou indexovou množinou**.

Definice 3.1.72: Buď $I = \{1, 2, \dots, m\}$ m -prvková indexová množina, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ n -prvková indexová množina. Maticí typu $m \times n$ rozumíme zobrazení

$$A : I \times J \rightarrow \mathbb{R}, \quad [i, j] \rightarrow a_{ij} \text{ resp. } A([i, j]) = a_{ij}.$$

Index i se nazývá **řádkový index** (čísluje řádky), index j se nazývá **sloupcový index** (čísluje sloupce).

Základní pojmy a definice

Poznámka: Bývá zvykem matici reprezentovat pomocí tabulky, prvky matice uspořádáme do řádků resp. sloupců,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Poznámka: Matice značíme obvykle velkými písmeny latinské abecedy. Chceme-li v označení matice zdůraznit její typ, používáme $A_{m \times n}$. V případě, že $m = n$, se používá termín **řád**, přičemž lze použít značení A_n .

Speciální tvary matic

- **Obdélníkovou maticí** rozumíme matici, pro kterou platí $m \neq n$.
- **Čtvercovou maticí** rozumíme matici, pro kterou platí $m = n$.
- **Nulová matice** je matice tvořená pouze nulami.
- **Jednotková matice** je taková čtvercová matice, kdy všechny prvky hlavní diagonály jsou rovny jedné, všechny ostatní prvky jsou rovny nule. Jednotková matice má speciální označení, používá se písmeno E . Tedy

$$E_1 = (1), \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

Poznamenejme, že prvky hlavní diagonály jsou prvky a_{ij} takové, že $i = j$.

- **Horní** (resp. **dolní**) **trojúhelníková matice** je čtvercová matice, jejíž prvky pod (resp. nad) hlavní diagonálou jsou nulové, tedy

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i > j \quad (\text{resp. } a_{ij} = 0 \text{ pro } i < j).$$

- **Transponovaná matice** A^T k matici A je matice, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce,

$$(a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

Speciální tvary matic

- **Diagonální matice** je čtvercová matice A s nenulovými prvky nejvýše na hlavní diagonále, tedy

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j.$$

- **Submatice** A_{ij} matice A je matice, která vznikne z matice A vynecháním jejího i -tého řádku a j -tého sloupce.
- **Maticí ve schodovitém tvaru** rozumíme matici A , jejíž každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami, než řádek předchozí, a za nulovým řádkem následují jen nulové řádky.
- Řekneme, že matice A je v **Gauss-Jordanově** tvaru, jestliže je ve schodovitém tvaru, hlavní prvky jsou jedničky, a čísla nad a pod hlavními prvky jsou nuly. **Hlavní prvek** je první nenulový prvek daného řádku bráný zleva.

- **Symetrická matice** je čtvercová matice A , pro kterou platí

$$A = A^T.$$

- **Antisymetrická matice** je čtvercová matice A , pro kterou platí

$$A = -A^T.$$

Definice 3.1.73:

- **Rovnost matic A, B**

Matice $A = (a_{ij})$ se rovná matici $B = (b_{ij})$, právě když jsou obě matice stejného typu a všechny vzájemně si odpovídající prvky jsou si rovny, tedy

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

- **Součet matic A, B**

Matice $C = (c_{ij})$ se nazývá součtem matic $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, právě když jsou matice A, B stejného typu a každý prvek matice C je součtem vzájemně si odpovídajících prvků matic A, B , tedy

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Operace s maticemi

- **Násobek matice A reálným číslem k**

Násobkem matice $A = (a_{ij})$ číslem $k \in \mathbb{R}$ rozumíme matici $B = (b_{ij})$ stejného typu, která vznikne tak, že každý prvek matice A násobíme číslem k . Tedy

$$B = k \cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

- **Součin matic A, B (označení: $C = A \cdot B$)**

Součinem matic $A = (a_{ik})$ typu $m \times n$ a $B = (b_{kj})$ typu $n \times p$ (B má tolik řádků jako má A sloupců) je matice C typu $m \times p$, jejíž každý prvek je dán následujícím vztahem,

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Poznámka

- Matice C má tolik řádků, kolik řádků má matice A , a tolik sloupců, kolik sloupců má matice B .
- Index k se nazývá **sčítací index**. Indexy i a j se nazývají **pevné** nebo **volné indexy**.
- Je-li jasné, který index je sčítací, vynechává se v zápisu součinu symbol sumy. Takovému přístupu se říká **Einsteinova sumační konvence**,

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Operace s maticemi

- Součin matic není komutativní, obecně neplatí vztah $A \cdot B = B \cdot A$.
- Existují matice, které nelze násobit. Vždy je třeba nejdříve ověřit před násobením matic jejich kompatibilitu (násobitelnost).
- Pro matice A, B (odpovídajících typů) platí:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Definice 3.1.74: Řádkově ekvivalentními úpravami matice budeme rozumět následující úpravy

- výměna libovolných dvou řádků
- vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem
- přičtení nenulového násobku daného řádku k jinému řádku

Definice 3.1.75: Matice A a B jsou **ekvivalentní**, jestliže lze matici A převést na matici B konečným počtem ekvivalentních úprav.

Definice 3.1.76: **Hodnost matice** A je počet nenulových řádků ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru. **Nenulový řádek** je řádek obsahující alespoň jeden prvek různý od nuly. Značíme h , $h(A)$, $\text{rank } A$, $\text{rank}(A)$.

Věta 3.1.77: *Je-li matice A typu $m \times n$, pak*

$$h(A) \leq \min(m, n).$$

Věta 3.1.78: *Ekvivalentní úpravy nemění hodnost matice.*

Poznámka

- Zcela analogicky se definují sloupcově ekvivalentní úpravy.
- Hodnost jednotkové matice n -tého řádu je n . Hodnost nulové matice je rovna nule.
- Hodnost počítáme tak, že pomocí řádkově ekvivalentních úprav převedeme matici na schodovitý tvar a spočítáme nenulové řádky.

2. Determinanty

Definice 3.2.79: Permutace na indexové množině I je libovolné prosté zobrazení

$$\sigma : I \rightarrow I, \quad \sigma(i) = \sigma_i$$

Permutaci na n -prvkové množině zapisujeme formou matice

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}.$$

Dvojice (σ_i, σ_j) se nazývá **inverze**, jestliže platí: $i < j \Rightarrow \sigma_i > \sigma_j$,
počet inverzí značíme $\text{inv } \sigma$. **Znaménko** permutace σ bude
 $\text{sgn } \sigma = (-1)^{\text{inv } \sigma}$.

Definice 3.2.80: **Determinantem** čtvercové matice řádu n , budeme rozumět následující reálné číslo,

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma_n}.$$

Definice 3.2.81: Jestliže $|A| \neq 0$, nazývá se matice A **regulární** matice. Jestliže $|A| = 0$, nazývá se matice A **singulární** matice.

Vlastnosti determinantů

Nechť A a B jsou čtvercové matice řádu n , pak

- $|A^T| = |A|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- Má-li matice A dva řádky nebo sloupce stejné, pak $|A| = 0$.
- Vznikne-li matice B z matice A :
 - vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců),
pak: $|B| = -|A|$,
 - vynásobením jednoho řádku (sloupce) číslem $k \in \mathbb{R}$, pak
 $|B| = k \cdot |A|$,
 - přičtením k -násobku, $k \in \mathbb{R}$, jednoho řádku (sloupce) k
jinému, pak: $|B| = |A|$.

Vlastnosti determinantů

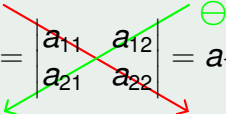
- Jsou-li řádky (sloupce) determinantu $|A|$ lineárně závislé (řádek v matici se nazývá lineárně závislý, jestliže jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních řádků, případně se jedná o řádek, který se anuluje při řádkově ekvivalentních úpravách při převodu matice na schodovitý tvar), pak $|A| = 0$.
- Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků hlavní diagonály.
- Determinant diagonální matice je roven součinu prvků hlavní diagonály.

Výpočet determinantu

Výpočet determinantu matice 1. řádu

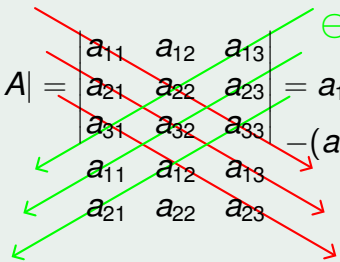
$$|A| = |a_{11}| = a_{11}$$

Výpočet determinantu matice 2. řádu - křížové pravidlo


$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Výpočet determinantu

Výpočet determinantu matice 3. řádu - Sarrusovo pravidlo


$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$

Poznámka: Pro determinanty čtvrtého a vyšších řádů žádné obdobné pravidlo neplatí.

Výpočet determinantu matice 4. a vyšších řádů

Výpočet determinantů vyšších řádů (tj. 4 a výše) můžeme provádět přímo podle definice, což je ale velmi pracné. Matici buď převedeme na trojúhelníkový tvar pomocí ekvivalentních úprav (pozor, některé úpravy mění determinant), poté stačí vynásobit prvky hlavní diagonály. Další možnost je použití Věty o Laplaceově rozvoji determinantu.

Výpočet determinantu

Výpočet determinantu matice 4. a vyšších řádů

Definice 3.2.82: Bud' A čtvercová matice řádu n . **Submaticí** A_{ij} budeme nazývat matici řádu $n - 1$, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce. Číslo $|A_{ij}|$ se nazývá **subdeterminant** nebo **minor**. Číslo $\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ se nazývá **algebraický doplněk** čísla a_{ij} .

Věta 3.2.83: *Laplaceův rozvoj determinantu*

Bud' A čtvercová matice řádu n , pak

$$|A| = a_{i1} \cdot \hat{a}_{i1} + a_{i2} \cdot \hat{a}_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \hat{a}_{in}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Poznámka:

- Zcela analogicky lze větu zformulovat pro rozvoj podle sloupce.
- Při výpočtu postupujeme tak, že si vybereme libovolný řádek nebo sloupec, a zkonstruujeme Laplaceův rozvoj.
- Hodnota determinantu nezávisí na volbě řádku nebo sloupce, vždy musí vyjít stejně.
- Je vhodné volit pro konstrukci rozvoje ten řádek nebo sloupec, který obsahuje co nejvíce nul.

3. Inverzní matice

Inverzní matice

Definice 3.3.84: Buď A matice. Pokud existuje matice B s vlastností $A \cdot B = B \cdot A = E$, pak se B nazývá **inverzní matice** k matici A , značíme $B = A^{-1}$.

Poznámka: Pokud inverzní matice existuje, pak je určena jednoznačně a navíc matice A a A^{-1} jsou zjevně matice stejného řádu. O existenci inverzní matice rozhoduje její regularita. Inverzní matice existuje pouze pro případ regulárních matic.

Věta 3.3.85: *Ke každé regulární matici A existuje inverzní matice A^{-1} , a platí:*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Věta 3.3.86: *Je-li A regulární matice řádu n , pak*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^{\text{alg}})^T,$$

*kde A^{alg} je matice algebraických doplňků k prvkům matice A . Matice $(A^{\text{alg}})^T$ se nazývá **adjungovaná matice** k matici A .*

Výpočet inverzní matice eliminační metodou Každou regulární matici A převedeme jen řádkově ekvivalentními úpravami na jednotkovou matici E . Stejné úpravy aplikujeme na jednotkovou matici E , která tímto přejde na hledanou inverzní matici A^{-1} , symbolicky

$$(A|E) \sim \dots \sim (E|A^{-1}).$$

4. Soustavy lineárních rovnic

Definice 3.4.87: Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých rozumíme

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,\end{aligned}$$

kde a_{ij} se nazývají **koeficienty** soustavy, x_j jsou **neznámé** a b_i jsou **pravé strany** rovnic soustavy pro $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Základní pojmy a definice

Definice 3.4.88: Řešením soustavy m lineárních rovnic o n neznámých nazveme každou uspořádanou n -tici $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, která po dosazení do soustavy za jednotlivé neznámé splní všechny rovnice soustavy.

Definice 3.4.89: Matici A , jejíž prvky tvoří koeficienty soustavy a_{ij} nazýváme **maticí soustavy**. Matici $A|B$, která vznikne z matice A připojením sloupce pravých stran, nazýváme **rozšířenou maticí soustavy**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Základní pojmy a definice

Poznámka: Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých můžeme zapsat také ve formě maticové rovnice:

$$A \cdot x = B,$$

kde A je matice soustavy, x je sloupec neznámých a B je sloupec pravých stran soustavy, tedy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definice 3.4.90: Pokud má soustava m lineárních rovnic o n neznámých všechny pravé strany rovny nule (tj. $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_m = 0$), pak se nazývá **homogenní soustava**.

Věta 3.4.91: Frobeniova věta:

*Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má **alespoň jedno řešení**, právě když se hodnost matice soustavy rovná hodnosti matice rozšířené,*

$$h(A) = h(A|B) = h.$$

Poznámka

- Pokud $h(A) \neq h(A|B)$, pak řešení soustavy **neexistuje**.
- Jestliže řešení soustavy existuje a $h = n$, má soustava **právě jedno řešení**, pro $h < n$ má soustava **nekonečně mnoho řešení** závislých na $n - h$ parametrech.
- Z Frobeniovy věty plyne, že homogenní soustava lineárních rovnic má vždy alespoň triviální řešení, $x = (0, 0, \dots, 0)$.

Definice 3.4.92: Dvě soustavy o stejném počtu neznámých (počet rovnic nemusí být stejný), nazýváme **ekvivalentní soustavy**, jestliže mají stejnou množinu řešení.

Poznámka: Ekvivalentní úpravy soustav jsou analogem řádkově ekvivalentních úprav matic.

- Vytvoříme rozšířenou matici soustavy $A|B$.
- Matici $A|B$ převedeme na schodovitý tvar.
- Prověříme existenci řešení z Frobeniovy věty.
- Převedeme matici na Gauss-Jordanův tvar.
- Určíme konkrétní tvar řešení.

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo se dá použít pouze pro soustavy matic s regulární maticí soustavy, tj, pro soustavy n lineárních rovnic o n neznámých, kdy matice soustavy A je čtvercová a navíc $|A| \neq 0$.

Věta 3.4.93: Cramerovo pravidlo:

*Je-li matice soustavy $A \cdot x = B$ regulární (tj. $|A| \neq 0$), pak existuje **jediné řešení** soustavy x , přičemž pro jeho složky x_k ($k = 1, \dots, n$, kde n je počet neznámých soustavy) platí*

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|},$$

kde $|A_k|$ je determinant matice, která vznikne z matice A nahrazením k -tého sloupce sloupcem pravých stran.

Cramerova pravidlo - postup

- Ověříme, že $|A| \neq 0$.
- Určíme jednotlivé determinanty $|A_k|$.
- Nalezneme jednotlivé komponenty řešení dosazením do formule z předchozí věty.

Maticové rovnice

Maticové rovnice jsou rovnice, ve kterých vystupují matice, např.:

$$A \cdot X = B,$$

$$X \cdot A = B,$$

matice X je hledaná neznámá matice, A je regulární matice a B je matice vhodného typu.

Takovéto rovnice můžeme řešit pomocí inverzní matice A^{-1} , a to násobením dané rovnice maticí A^{-1} zprava nebo zleva, dle typu počítané maticové rovnice.

Maticové rovnice

- **Řešení rovnice typu $A \cdot X = B$**

Rovnici násobíme maticí A^{-1} zleva, tedy

$$A \cdot X = B \quad / \cdot A^{-1} \text{ zleva}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

- **Řešení rovnice typu $X \cdot A = B$**

Rovnici násobíme maticí A^{-1} zprava, tedy

$$X \cdot A = B \quad / \cdot A^{-1} \text{ zprava}$$

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí inverzní matice

Poznámka: Soustavu lineárních rovnic $A \cdot x = B$ lze pro regulární matici A řešit jako speciální případ maticové rovnice,

$$x = A^{-1}B.$$

Věta 3.4.94: *Je-li matice soustavy $A \cdot x = B$ regulární (tj. $|A| \neq 0$), pak existuje **jediné řešení** soustavy x ,*

$$x = A^{-1} \cdot B.$$

Matematika I

Analytická geometrie

1. Vektorová algebra

Co je to vektor? Na tuto poměrně zásadní otázku existuje jednoduchá odpověď'. **Vektor je prvek vektorového prostoru.** Je třeba ovšem také říci, co je to vektorový prostor. Pro naše účely si vystačíme s následující definicí.

Definice 4.1.95: Vektorový prostor V nad množinou reálných čísel $\mathbb{R}$ je množina s operací sčítání $+$ prvků z V (**vektorů**) a vnější násobení $\cdot$ vektoru reálným číslem, přičemž $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

$$1. \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$2. \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

$$3. \quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

$$4. \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$5. \quad 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$6. \quad p \cdot (q \cdot \mathbf{u}) = (p \cdot q) \cdot \mathbf{u}$$

$$7. \quad (p + q) \cdot \mathbf{u} = (p \cdot \mathbf{u}) + (q \cdot \mathbf{u})$$

$$8. \quad p \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (p \cdot \mathbf{u}) + (p \cdot \mathbf{v})$$

Poznámka: V množině V existuje neutrální prvek vůči sčítání, tzv. **nulový vektor**, tj. platí $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.

Poznámka: Příkladem vektorových prostorů nad množinou $\mathbb{R}$ je samotná množina $\mathbb{R}$, dále kartézský součin množin reálných čísel se sebou, $\mathbb{R}^n$ (tzv. **aritmetický vektorový prostor**). My se pro naše účely omezíme na vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Jeho prvky (uspořádané trojice) budeme nazývat **aritmetické vektory**, značíme $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Definice 4.1.96: Lineární kombinací vektorů

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ rozumíme vektor

$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + \dots + v_n \mathbf{u}_n \in V$, kde $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$.

Definice 4.1.97: Řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ **generují** V , jestliže lze každý vektor z V vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.

Definice 4.1.98: Řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže platí

$$v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + \dots + v_n \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0.$$

Neplatí-li tato podmínka, pak jsou vektory **lineárně závislé**.

Definice 4.1.99: Řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ tvoří **bázi** vektorového prostoru V , jestliže generují V a jsou lineárně nezávislé. Počet vektorů báze se pak nazývá **dimenze** vektorového prostoru V , značíme V^n nebo $\dim V = n$.

Definice 4.1.100: Nechť vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ tvoří bázi V . Pak koeficienty $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ lineární kombinace $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + \dots + v_n \mathbf{u}_n$ se nazývají **souřadnice** vektoru $\mathbf{v}$ v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$; zapisujeme $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Vektory - skalární součin, velikost vektoru

Definice 4.1.101: Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **skalární součin** na V , jestliže pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$1. \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad 3. \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$2. \quad (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad 4. \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$$

Definice 4.1.102: Řekneme, že vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ jsou na sebe **kolmé**, jestliže $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. **Velikostí** vektoru $\mathbf{u}$ rozumíme číslo $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.

Definice 4.1.103: Řekneme, že báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ vektorového prostoru V je **ortonormální**, jestliže vektory báze jsou **jednotkové** (jejich velikost je rovna jedné) a navzájem na sebe kolmé. Odpovídající souřadnice v ortonormální bázi pak nazýváme **kartézské souřadnice**.

Definice 4.1.104: Bud' V vektorový prostor. **Afinním prostorem** nad V rozumíme množinu $\mathcal{A}$, společně s operací sčítání $+$, která libovonému prvku $z \mathcal{A}$ a libovolnému vektoru $z V$ přiřadí prvek $z \mathcal{A}$, tj. $A + \mathbf{u} = B$, $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbf{u} \in V$. Prvkům $z \mathcal{A}$ říkáme **body**.

Definice 4.1.105: Bud' $\mathcal{A}$ afinní prostor nad V . Je-li na V zaveden skalární součin, pak se afinní prostor nazývá **Eukleidovský prostor**, $\mathcal{E}$.

Základní pojmy a definice

Omezíme se na trojrozměrný Eukleidovský prostor, který budeme označovat $\mathcal{E}^3$ a ztotožňovat s $\mathbb{R}^3$, body $\mathcal{E}^3$ značíme $A = [a_1, a_2, a_3]$. Na $\mathbb{R}^3$ existují různé algebraické struktury; struktura vektorového, afinního a Eukleidovského prostoru, aj.

Poznámka: V trojrozměrném prostoru $\mathcal{E}^3$ je kartézský souřadnicový systém reprezentován třemi vzájemně kolmými osami (značíme x, y, z), které se protínají v jednom společném bodě, **počátku** soustavy souřadnic (značíme O).

Poznámka: V $\mathcal{E}^3$ zvolíme ortonormální bázi tvořenou vektory $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ a $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Pak každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{E}^3$ bude mít v této bázi vyjádření $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$. Čísla u_1, u_2, u_3 se nazývají **kartézské souřadnice** vektoru $\mathbf{u}$, značíme $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Definice 4.1.106: Souřadnice bodu A v kartézské soustavě souřadnic je v prostoru trojice reálných čísel a_1, a_2, a_3 , které dostaneme jako vzdálenost počátku soustavy souřadnic a kolmého průmětu bodu A do odpovídajících souřadných os x, y, z (Označení: $A = [a_1, a_2, a_3]$ - bod A o souřadnicích a_1, a_2, a_3).

Základní pojmy a definice

Definice 4.1.107: Necht' $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ jsou dva body v prostoru. **Orientovanou úsečkou** AB nazveme úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B .

Geometrickým vektorem rozumíme množinu všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti. (Označení vektoru: AB nebo $\mathbf{a}$, vektor AB je určen jako rozdíl souřadnic koncového a počátečního bodu, $AB = B - A$).

Definice 4.1.108: **Nulovým vektorem** nazýváme vektor, jehož počáteční a koncový bod splývají, tedy jeho velikost je rovna nule. (Označení: $\mathbf{0}$).

Definice 4.1.109: Nechť je dána kartézská soustava souřadnic a libovolný bod $A = [a_1, a_2, a_3] \in \mathcal{E}^3$. **Polohovým vektorem** nazveme orientovanou úsečku OA , $O = [0, 0, 0]$.

Poznámka: Polohový vektor je tedy tělesová úhlopříčka v kvádru o hranách a_1, a_2, a_3 .

Věta 4.1.110: *Nechť jsou dány vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Pak platí*

- *pro násobení vektoru reálným číslem $c \in \mathbb{R}$*

$$c \cdot \mathbf{a} = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, c \cdot a_3),$$

- *pro rovnost vektorů*

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3,$$

- *pro součet vektorů*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

- *pro rozdíl vektorů*

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3),$$

Skalární součin vektorů

Definice 4.1.111: Skalárním součinem dvou nenulových vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ (označení: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$) rozumíme **číslo**, pro které platí

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Poznámka: Jestliže je jeden z vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ nulový, pak

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Definice 4.1.112: Nechť je dán vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. **Velikostí vektoru $\mathbf{a}$** (označení: $|\mathbf{a}|$) rozumíme

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Skalární součin vektorů

Definice 4.1.113: Odchylka dvou vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je číslo (úhel) $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

Vlastnosti skalárního součinu

- komutativní zákon:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$

- distributivní zákon:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},$$

- kolmost vektorů:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Vektorový součin vektorů

Definice 4.1.114: Vektorovým součinem dvou nenulových vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (označení: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) rozumíme **vektor** $\mathbf{c}$, pro který platí

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

kde $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ jsou základní jednotkové vektory:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Vektorový součin vektorů

Věta 4.1.115: *Mějme dva nenulové vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, pak platí*

- *vektor $\mathbf{c}$ je kolmý na vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, tedy*

$$\mathbf{c} \perp \mathbf{a} \quad \wedge \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b},$$

- *pro velikost vektoru $\mathbf{c}$*

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi,$$

kde φ je úhel, který svírají vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,

- *vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ v tomto pořadí tvoří tzv. pravotočivou trojici.*

Vektorový součin vektorů

Věta 4.1.116: *Nechť jsou dány vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Je-li jeden z vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ nulový, nebo je-li vektor $\mathbf{a}$ násobkem vektoru $\mathbf{b}$ (říkáme, že vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ jsou lineárně závislé) pak*

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}.$$

Vektorový součin vektorů

Vlastnosti vektorového součinu

- antikomutativní zákon:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

- distributivní zákon:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c},$$

- násobení reálnými čísly $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha \cdot \mathbf{a}) \times (\beta \cdot \mathbf{b}) = \alpha \cdot \beta \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Geometrický význam vektorového součinu

- Vektorový součin je kolmý na rovinu určenou vektory **$\mathbf{a}$** a **$\mathbf{b}$** .
- Velikost vektorového součinu vektorů **$\mathbf{a}$** , **$\mathbf{b}$** , tj. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, udává obsah rovnoběžníka o stranách **$\mathbf{a}$** a **$\mathbf{b}$** .
- Dva nenulové vektory **$\mathbf{a}$** , **$\mathbf{b}$** , jsou rovnoběžné, právě když jejich vektorovým součinem je nulový vektor.

Smíšený součin vektorů

Definice 4.1.117: Smíšeným součinem tří vektorů

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ (označení: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$) rozumíme číslo $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, tj.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}).$$

Geometrický význam smíšeného součinu

- Tři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou **komplanární** (leží v jedné rovině), právě když

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0.$$

- Objem V **rovnoběžnostěnu** určeného vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ je dán vztahem

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

- Objem V **čtyřstěnu** určeného vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ je dán vztahem

$$V = \frac{1}{6} |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

2. Analytická geometrie v prostoru

Přímku lze jednoznačně určit dvěma různými body nebo bodem a vektorem, tzv. **určujícím směrem přímky**,

$$p = \{A, B\}, \quad p = \{A, AB\}, \quad p = \{A, \mathbf{u}\}.$$

Definice 4.2.118: Vektorovou (symbolickou) rovnicí přímky $p = \{A, \mathbf{u}\}$ nazýváme rovnici

$$p : X = A + t\mathbf{u},$$

bod $X \in p$, $\mathbf{u}$ je směrovým vektorem přímky p , $t \in \mathbb{R}$ je parametr přímky p .

Definice 4.2.119: Nechť je dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrový vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. **Parametrickými rovnicemi přímky** $p = \{A, \mathbf{u}\}$ nazveme rovnice:

$$\begin{aligned}x &= a_1 + tu_1, \\p : y &= a_2 + tu_2, \\z &= a_3 + tu_3,\end{aligned}$$

bod $X = [x, y, z] \in p$ je bod ležící na dané přímce.

Poznámka: Všimněme si, že parametrické rovnice přímky dostaneme opět pouhým dosazením příslušných souřadnic daného bodu a vektoru do vektorové rovnice přímky.

Vzájemná poloha dvou přímek v $\mathcal{E}^3$

Nechť jsou dány dvě přímky p, q o rovnicích:

$$p : X = A + t\mathbf{u}, \quad q : X = B + s\mathbf{v}.$$

Rozlišujeme čtyři typy vzájemných poloh, vždy záleží, co mají anebo nemají přímky společného:

- Vzájemná poloha **rovnoběžná různá**

$$p \parallel q \Leftrightarrow \text{mají společný směr, nemají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **totožná**

$$p \equiv q \Leftrightarrow \text{mají společný směr a bod, tzn. všechny body}$$

Vzájemná poloha dvou přímek v $\mathcal{E}^3$

- Vzájemná poloha **různoběžná**

$p \cap q = \{P\} \Leftrightarrow$ nemají společný směr, mají společný bod

- Vzájemná poloha **mimoběžná**

$p \not\parallel q \Leftrightarrow$ nemají společný směr ani bod

Poznámka: Společnému bodu různoběžných přímek se říká **průsečík**.

Vzájemná poloha dvou přímek v $\mathcal{E}^3$

Ke zjištění konkrétní vzájemné polohy se používá **klasifikační matice**. Matici poskládáme ze směrových vektorů a přidáme tzv. **bodový směr**, vektor spojující určující body přímek. Řádky, které se v matici při řádkově ekvivalentních úpravách anulují, pak indikují odpovídající společnou vlastnost.

Klasifikační matice

$$p = \{A, \mathbf{u}\}, \quad q = \{B, \mathbf{v}\}, \quad \left(\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \hline AB \end{array} \right)$$

Rovinu lze jednoznačně určit třemi body neležícími na téže přímce; dvěma body a směrem určujícím přímku, která těmito body neprochází; bodem a dvěma nekolineárními směry,

$$\rho = \{A, B, C\}, \quad \rho = \{A, B, \mathbf{u}\}, \quad \rho = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

Definice 4.2.120: Vektorovou (symbolickou) rovnicí roviny

$\rho = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ nazýváme rovnici

$$\rho : X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v},$$

bod $X \in \rho$, $t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry roviny ρ .

Definice 4.2.121: Nechť je dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrové vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. **Parametrickými rovnicemi roviny** $\rho = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ nazveme rovnice:

$$\begin{aligned}x &= a_1 + tu_1 + sv_1, \\ \rho : y &= a_2 + tu_2 + sv_2, \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3,\end{aligned}$$

bod $X = [x, y, z] \in \rho$ je bod ležící na dané rovině.

Poznámka: Všimněme si, že parametrické rovnice roviny dostaneme pouhým dosazením příslušných souřadnic daných bodů a vektorů do vektorové rovnice roviny.

Rovina určená bodem a normálovým vektorem

Definice 4.2.122: Normálovým vektorem roviny ρ (označení: $\mathbf{n} = (a, b, c)$) nazýváme vektor kolmý na rovinu ρ , $\mathbf{n} \perp \rho$.

Poznámka: Normálový vektor roviny ρ je kolmý na všechny vektory této roviny, tedy platí

$$AX \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{body } A, X \in \rho.$$

Rozepíšeme skalární součin pro $A = [a_1, a_2, a_3]$, $X = [x, y, z]$,
 $AX = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$, $\mathbf{n} = (a, b, c)$,

$$(x - a_1)a + (y - a_2)b + (z - a_3)c = 0.$$

Roznásobením a označením $d = -(aa_1 + ba_2 + ca_3)$ dostáváme

$$\rho : ax + by + cz + d = 0.$$

Rovina určená bodem a normálovým vektorem

Definice 4.2.123: Obecnou rovnicí roviny ρ nazýváme rovnici

$$\rho : ax + by + cz + d = 0.$$

Rovina určená bodem a normálovým vektorem

Definice 4.2.124: Úsekovou rovnicí roviny ρ nazýváme rovnici tvaru

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

kde $p, q, r \in \mathbb{R}$ představují úseky, které vytíná rovina na souřadných osách.

Poznámka: Rovina daná obecnou rovnicí může mít různé polohy vzhledem k souřadným osám v závislosti na koeficientech a, b, c, d . Neobsahuje-li rovnice roviny některou proměnnou (souřadnici), pak je daná rovina rovnoběžná s příslušnou osou, popřípadě touto osou prochází.

Vzájemná poloha přímky a roviny v $\mathcal{E}^3$

Nechť je dána přímka p a rovina ρ o rovnicích:

$$p : X = A + t\mathbf{u}, \quad \rho : X = B + k\mathbf{v} + l\mathbf{w}.$$

Rozlišujeme tři typy vzájemných poloh, vždy záleží, co mají anebo nemají objekty společného:

- Vzájemná poloha **rovnoběžná různá**

$$p \parallel \rho \Leftrightarrow \text{mají společný směr, nemají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **přímka leží v rovině**

$$p \subset \rho \Leftrightarrow \text{mají společný směr a bod, tzn. všechny body přímky}$$

- Vzájemná poloha **různoběžná**

$$p \cap \rho = \{P\} \Leftrightarrow \text{nemají společný směr, mají společný bod}$$

NEEXISTUJE MIMOBĚŽNÁ POLOHA PŘÍMKY A ROVINY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU!

Vzájemná poloha přímky a roviny v $\mathcal{E}^3$

Poznámka: Společnému bodu v případě různoběžné polohy přímky a roviny se říká **průsečík**.

Ke zjištění konkrétní vzájemné polohy se používá **klasifikační matice**. Matici poskládáme ze směrových vektorů a přidáme tzv. **bodový směr**, vektor spojující určující body přímky a roviny. Řádky, které se v matici při řádkově ekvivalentních úpravách anulují, pak indikují odpovídající společnou vlastnost.

Klasifikační matice

$$\rho = \{A, \mathbf{u}\}, \quad \rho = \{B, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \hline AB \end{pmatrix}$$

Vzájemná poloha dvou rovin v $\mathcal{E}^3$

Nechť jsou dány dvě roviny α a β o rovnicích:

$$\alpha : X = A + k\mathbf{u} + l\mathbf{v}, \quad \beta : X = B + p\mathbf{u}' + r\mathbf{v}'.$$

Rozlišujeme tři typy vzájemných poloh, vždy záleží, co mají anebo nemají objekty společného:

- Vzájemná poloha **rovnoběžná různá**

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \text{mají společné směry, nemají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **totožná**

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \text{mají společné směry a bod, tzn. všechny body}$$

- Vzájemná poloha **různoběžná**

$$\alpha \cap \beta = p \Leftrightarrow \text{mají společný směr, mají společný bod}$$

**NEEXISTUJE MIMOBĚŽNÁ POLOHA DVOU ROVIN V
TROJROZMĚRNÉM PROSTORU!**

Vzájemná poloha dvou rovin v $\mathcal{E}^3$

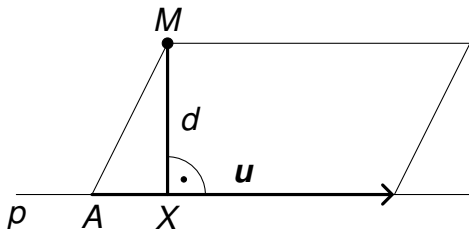
Poznámka: Společné přímce různoběžných rovin se říká **průsečnice**.

Ke zjištění konkrétní vzájemné polohy se používá **klasifikační matice**. Matici poskládáme ze směrových vektorů a přidáme tzv. **bodový směr**, vektor spojující určující body rovin. Řádky, které se v matici při řádkově ekvivalentních úpravách anulují, pak indikují odpovídající společnou vlastnost.

Klasifikační matice

$$\alpha = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}, \quad \beta = \{B, \mathbf{u}', \mathbf{v}'\}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \\ \hline AB \end{pmatrix}$$

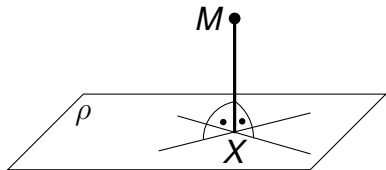
Vzdálenost bodu od přímky v $\mathcal{E}^3$



$$d(M, p) = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{AM}|}{|\mathbf{u}|}$$

Vzdálenost bodu M od přímky $p = \{A, \mathbf{u}\}$ je velikost vektoru $\mathbf{MX}$ kolmého na přímku p a procházejícího bodem M , přičemž $X \in p$ je kolmým průmět bodu M do přímky p .

Vzdálenost bodu od roviny v $\mathcal{E}^3$



$$d(M, \rho) = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

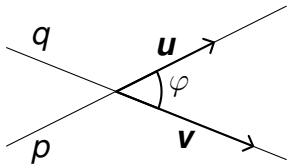
Vzdálenost bodu $M = [m_1, m_2, m_3]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$ je velikost vektoru MX kolmého na rovinu ρ a procházejícího bodem M , přičemž $X \in \rho$ je kolmý průmět bodu M do roviny ρ .

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v $\mathcal{E}^3$

V jedné z rovin zvolíme libovolný bod a úlohu převedeme na hledání vzdálenosti bodu od roviny. Pro vzdálenost dvou rovin $\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0$, $\beta : ax + by + cz + d_2 = 0$ platí

$$d(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

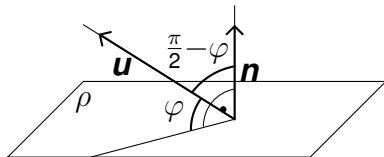
Odchylka dvou přímek v $\mathcal{E}^3$



$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}, \quad \varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

Odchylku dvou přímek určíme jako odchylku jejich směrových vektorů.

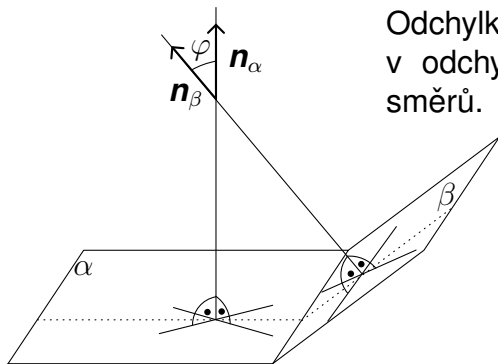
Odchylka přímky od roviny v $\mathcal{E}^3$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|}$$

Odchylku přímky od roviny převádíme na odchylku přímku od normálového směru roviny.

Odchylka dvou rovin v $\mathcal{E}^3$

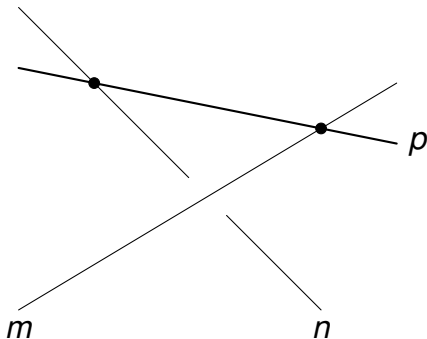


Odchylka dvou rovin přechází
v odchylku jejich normálových
směrů.

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta|}{|\mathbf{n}_\alpha| \cdot |\mathbf{n}_\beta|}$$

Příčka mimoběžek

Definice 4.2.125: Příčka p mimoběžek m a n je každá přímka p , která obě mimoběžky protíná.



Poznámka: Příček existuje nekonečně mnoho. Obvykle se řeší úloha, kdy hledáme příčku dvou mimoběžek procházející daným bodem nebo rovnoběžnou s daným směrem.

Nalezněte příčku procházející daným bodem P

- $m = \{M, \mathbf{m}\}, n = \{N, \mathbf{n}\}$
- $\alpha = \{P, M, \mathbf{m}\}, \beta = \{P, N, \mathbf{n}\}$
- $p = \alpha \cap \beta$

Nalezněte příčku rovnoběžnou s daným směrem p

- $m = \{M, \mathbf{m}\}, n = \{N, \mathbf{n}\}$
- $\alpha = \{M, \mathbf{m}, p\}, \beta = \{N, \mathbf{n}, p\}$
- $p = \alpha \cap \beta$

Definice 4.2.126: **Osa** mimoběžek je příčka, která je na obě mimoběžky kolmá.

Poznámka: Osu hledáme stejně jako v případě příčky rovnoběžné s daným směrem. Směr ovšem musí být kolmý na obě příčky a získáme jej jako vektorový součin určujících směrů obou mimoběžek, $\mathbf{o} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$.