

V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete hodnotu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Můžeme (a budeme) postupovat dvěma způsoby. V prvním budeme matici $\mathbf{A}$ upravovat na trojúhelníkový nebo schodovitý tvar. V druhém využijeme vlastností determinantu.

Úprava

Nejprve postupujeme úpravou na trojúhelníkový tvar, z něž lze hodnotu matice „vyčíst“, jako počet nenulových řádků v tomto tvaru.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{matrix} \boxed{-a} \\ \boxed{+} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -a-2 & 1-a^2 \\ 0 & -1 & 3-3a \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot -1 \\ | \cdot -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a^2-1 \\ 0 & 1 & 3a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\boxed{}} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3a-3 \\ 0 & a+2 & a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\boxed{-(a+2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3a-3 \\ 0 & 0 & -2a^2-3a+5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z tvaru, který jsme úpravami obdrželi, vidíme, že pro $-2a^2 - 3a + 5 \neq 0$ bude hodnota $h(\mathbf{A}) = 3$, neboť se v trojúhelníkovém tvaru budou všechny řádky nenulové.

Naopak pro $-2a^2 - 3a + 5 = 0$ bude poslední řádek složen jen z nul, proto bude $h(\mathbf{A}) = 3$.

Zbývá tedy vyřešit rovnici

$$\begin{aligned} -2a^2 - 3a + 5 = 0, \rightarrow D = (-3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 49, \rightarrow \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(-2)} \\ a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 1. \end{aligned}$$

Pro $a \neq -\frac{1}{2}$ a $a \neq 1$ je tedy $h(\mathbf{A}) = 3$. Pro $a = -\frac{1}{2}$ a $a = 1$ je $h(\mathbf{A}) = 2$.

Determinant

V druhém postupu využijeme vlastností determinantu. Je-li totiž $|\mathbf{A}| = 0$, je matice $\mathbf{A}$ *singulární*, její řádky lineárně závislé a tedy $h(\mathbf{A}) < 3$. Je-li naopak $|\mathbf{A}| \neq 0$, je matice $\mathbf{A}$ *regulární*, její řádky jsou lineárně nezávislé a $h(\mathbf{A}) = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-6 + 3 + 2a^2) - (-6a + 3a + 2) = (2a^2 - 3) - (2 - 3a) = 2a^2 + 3a - 5.$$

Opět tedy máme vyřešit rovnici $2a^2 + 3a - 5 = 0$. Její kořeny jsou $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 1$. Např. pro $a = 1$ má matice $\mathbf{A}$ tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \leftarrow + \\ \boxed{} \\ \leftarrow + \end{array}^{-3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \boxed{+} & \boxed{} \\ \leftarrow -3 & \leftarrow \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a odtud je patrné, že v tomto případě je $h(\mathbf{A}) = 2$. Obdobně i pro $a = -\frac{1}{2}$ je $h(\mathbf{A}) = 2$. Pro $a \neq 1$ a $a \neq -\frac{1}{2}$ je $h(\mathbf{A}) = 3$.