

Vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ 2 \cos x & \sin 2x \end{vmatrix} = 0.$$

Řešení:

Začneme schematickým znázorněním výpočtu hodnoty determinantu čtvercové matice řádu dva,

tedy $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. V případě zadání tedy máme $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ 2 \cos x & \sin 2x \end{vmatrix}$ a de-

terminant je takto roven $\cos x \sin 2x - (-2 \sin x \cos x)$. Řešíme tedy rovnici

$$\begin{aligned} \cos x \sin 2x - (-2 \sin x \cos x) &= 0 \\ \cos x \sin 2x + \sin 2x &= 0 \\ \sin 2x (\cos x + 1) &= 0 \\ \sin 2x = 0 &\quad \vee \quad \cos x + 1 = 0 \\ \sin 2x = 0 &\quad \vee \quad \cos x = -1 \\ 2x = k\pi &\quad \vee \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2}k &\quad \vee \quad x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zadaná rovnice tedy má řešení $x = \frac{\pi}{2}k$, $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$\begin{vmatrix} x & 1-x & 1 \\ 1 & 2 & x+1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5x.$$

Řešení:

I v případě determinantu řádu tři si lze pomoci schematem, a to

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

V tomto případě to je

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & 1-x & 1 \\ 1 & 2 & x+1 \\ x & 1 & 2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} x & 1-x & 1 \\ 1 & 2 & x+1 \end{array} \end{array}$$

a determinant se bude rovnat

$$\begin{aligned} & (4x + 1 + x(1-x)(1+x)) - (2x + x(1+x) + 2(1-x)) = \\ & = \left(4x + 1 + x(1-x^2)\right) - \left(2x + x + x^2 + 2 - 2x\right) = \left(4x + 1 + x - x^3\right) - \left(x^2 + 2\right) = \\ & = -x^3 - x^2 + 4x - 1. \end{aligned}$$

Musíme tedy vyřešit rovnici

$$\begin{aligned} -x^3 - x^2 + 4x - 1 &= 5x \\ 0 &= x^3 + x^2 + x + 1 \\ 0 &= x^2(x+1) + (x+1) \\ 0 &= (x^2+1)(x+1) \\ x^2+1 &= 0 \quad \vee \quad x+1=0 \\ x^2 &\neq -1 \quad \vee \quad x=-1 \end{aligned}$$

Rovnice má tedy jediné řešení, a to $x = -1$.