

Vyřešte soustavu rovnic

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$2x_1 + 2x_3 + 3x_5 = 0$$

Řešení:

Budeme postupovat *Gaussovou eliminační metodou*, ovšem již před samotným řešením se za pomoci *Frobeniových vět* můžeme dovědět, že soustava bude mít nekonečně mnoho řešení.

Jde totiž o soustavu homogenní, pravá strana všech rovnic je nulová, a proto vždy bude platit $h(S) = h(S|r)$. Dále jde o soustavu čtyř rovnic o pěti neznámých, proto určitě bude $h(S) < 5$ a v řešení se tedy objeví $5 - h(S)$ parametrů.

Nyní již tedy upravujeme maticový zápis

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 & 5 & | & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 & 5 & | & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow -1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 & 5 & | & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & -5 & 13 & | & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & -5 & 13 & | & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -3 & 9 & | & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Poslední úpravou může být výměna pořadí řádků, tak jak je naznačeno na obr. 1. Z něj lépe vidět, že hodnoty $h(S)$ a $h(S|r)$ se opravdu rovnají a tedy soustava rovnic má řešení. Protože jde o soustavu s 5 neznámými a $h(S) = h(S|r) = 3$ bude řešení nekonečně mnoho a budou záviset na dvou parametrech.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Obrázek 1: Hodnoty $h(S)$ a $h(S|r)$

Volme tedy $x_4 = s$ a $x_5 = t$ s parametry $s, t \in \mathbb{R}$ pak z třetího řádku máme

$$5x_3 = 3x_4 - 9x_5 \Rightarrow 5x_3 = 3s - 9t \Rightarrow x_3 = \frac{3}{5}s - \frac{9}{5}t.$$

S takto vyjádřeným x_3 můžeme pokračovat. Pokud si však budeme chtít ušetřit práci, provedeme drobnou změnu a zvolíme parametry jinak. Konkrétně volba $x_4 = 5u$ a $x_5 = 5v$ s parametry $u, v \in \mathbb{R}$ vede k

$$5x_3 = 3x_4 - 9x_5 \Rightarrow 5x_3 = 15u - 45v \Rightarrow x_3 = 3u - 9v.$$

Dále je

$$2x_2 = -x_3 + x_4 - 2x_5 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 = -3u + 9v + 5u - 10v \quad \Rightarrow \quad x_2 = u - \frac{1}{2}v.$$

A konečně

$$x_1 = -3x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3u + \frac{3}{2}v.$$

Pokud ještě jednou parametry upravíme, $v = 2w$, pak můžeme psát řešení ve tvaru

$$x_1 = -3u + 3w, \quad x_2 = u - w, \quad x_3 = 3u - 18w, \quad x_4 = 5u, \quad x_5 = 10w, \quad u, w \in \mathbb{R}.$$

Pro dvojici parametrů $u = 0, w = 0$ je $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, pro $u = 1, w = -1$ máme $x_1 = -6, x_2 = 2, x_3 = 21, x_4 = 5, x_5 = -10$, a tak dál a tak podobně.