

**Vyřešte soustavu rovnic**

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 0.\end{aligned}$$

**Řešení:**

**„Klasická“ vyjadřovací metoda**

Hledáme  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ , která splňují soustavu tří rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Vyjádříme-li si (např.) z první z nich (např.)  $x_1$  dostáváme  $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3$ . Tento vztah dále dosadíme do zbylých dvou rovnic, tj.

$$\begin{aligned}2(1 - 2x_2 - 3x_3) + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\(1 - 2x_2 - 3x_3) + x_2 + x_3 &= 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}-x_2 - 2x_3 &= -1 \\-x_2 - 2x_3 &= -1\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}x_2 + 2x_3 &= 1 \\x_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}.$$

Takto jsme ze soustavy tří rovnic o třech neznámých získali dvě rovnice o dvou neznámých. Neznámá  $x_1$  byla vyjádřením a dosazením *eliminována*.

V „nové“ soustavě jsou však obě rovnice stejné, musíme tedy vyřešit jednu rovnici o dvou neznámých, a to  $x_2 + 2x_3 = 1$ . V takové řešení bude buď hodnota  $x_2$  záviset na  $x_3$  nebo naopak. Vyjádříme tedy  $x_2 = 1 - 2x_3$  a v tomto vztahu nahradíme  $x_3$  *parametrem*  $t \in \mathbb{R}$ . Obdobně to provedeme s vyjádřením  $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3$ , do nějž dosadíme  $x_2 = 1 - 2t$  a  $x_3 = t$  a dostaneme řešení soustavy

$$x_1 = -1 + t, \quad x_2 = 1 - 2t, \quad x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože za  $t$  můžeme dosadit libovolné reálné číslo, má soustava nekonečně mnoho řešení. Volbou  $t = 0$  dostaneme řešení  $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0$ , pro  $t = 1$  je řešením  $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$ .

**Gaussova eliminační metoda**

Zapišme danou soustavu maticově, a to tak, že rovnici  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$  odpovídá řádek 1 2 3 | 1 a podobně. Řádky v matici sčítáme či odčítáme s cílem *eliminovat* neznámé.

Můžeme postupovat například takto

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow_+]{\begin{array}{c} \boxed{-2} \\ \leftarrow_+ \end{array}}^{-1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right).$$

Dvě provedené úpravy, odečtení dvojnásobku prvního řádku od druhého a odečtení prvního od třetího, z druhé a třetí rovnice *eliminují* neznámou  $x_1$ , obdobně jako se to v předchozím postupu podařilo dosazením vyjádření  $x_1$ .

Po dalších v úpravách, vynásobení druhého a třetího řádku  $-1$  a pak jejich odečtením,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{array}{c} \square \\ -1 \end{array}} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) | \cdot -1 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

máme tvar odpovídající dvěma rovnicím  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$  a  $x_2 + 2x_3 = 1$ , v nichž však figurují tři neznámé.

Soustavu již můžeme dořešit volbou parametru nebo ji dále upravovat a situaci si dále zjednodušit

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\square -2]{\leftarrow +} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

Samozřejmě nám stále zůstávají dvě rovnice o třech neznámých. Každá z nich však obsahuje pouze dvě z nich. Mají tvar  $x_1 - x_3 = -1$  a  $x_2 + 2x_3 = 1$ . Volbou parametru  $x_3 = t \in \mathbb{R}$  pak opět dostáváme

$$x_1 = -1 + t, \quad x_2 = 1 - 2t, \quad x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

### Frobeniova věta

Ilustrujme si na tomto příkladě ještě *Frobeniovu větu*, která dává do souvislosti hodnotu matice soustavy  $h(S)$ , hodnotu matice rozšířené  $h(S|r)$  a existenci řešení soustavy.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Obrázek 1: Hodnoty  $h(S)$  a  $h(S|r)$

Jak je vidět na obr. 1 je  $h(S) = 2$  a také  $h(S|r) = 2$ , což znamená, že soustava má řešení. Protože je tato hodnota menší než počet neznámých, tj. 3, bude řešení záviset na  $3 - 2$  parametrech.

### Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

### Řešení:

#### „Klasická“ vyjadřovací metoda

Opět začneme „klasicky“, tj. vyjádřením a dosazením. Z první rovnice je  $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3$ , a tak po dosazení do druhé a třetí dostaneme

$$\begin{aligned} 2(1 - 2x_2 - 3x_3) + 3x_2 + 4x_3 &= 1 & \implies & 2 - 4x_2 - 6x_3 + 3x_2 + 4x_3 = 1 & \implies & x_2 + 2x_3 = 1 \\ (1 - 2x_2 - 3x_3) + x_2 + 2x_3 &= 1 & & 1 - 2x_2 - 3x_3 + x_2 + 2x_3 = 1 & & x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

Ze soustavy tří rovnic o třech neznámých získali dvě rovnice o dvou neznámých, protože  $x_1$  bylo vyjádřením a dosazením *eliminováno*.

Vyjádříme-li nyní z druhé rovnice  $x_2 = 1 - 2x_3$  a dosadíme do třetí dostáváme

$$(1 - 2x_3) + x_3 = 1 - x_3 = 0 \implies x_3 = 1.$$

Známe-li  $x_3$  snadno dopočítáme  $x_2$  a  $x_1$ . Řešení soustavy je jediné a to

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

## Gaussova eliminační metoda

Zapíšeme si zadanou soustavu maticově a budeme ji upravovat.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{array}{c} \boxed{-2} \\ \boxed{+} \end{array}}^{-1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\boxed{-1}}^{-1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Polední řádek lze „přečíst“ jako rovnici  $x_3 = 1$  a dosazením této hodnoty již dopočteme  $x_2$  a poté i  $x_1$ . Ovšem můžeme pokračovat dále v úpravách. Po dalších v úpravách, vynásobení druhého a třetího řádku  $-1$  a pak jejich odečtením,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{array}{c} \boxed{-2} \\ \boxed{+} \end{array}}^{-1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\boxed{-2}}^{-1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) | \cdot -1 \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Po těchto úpravách již z posledního tvaru snadno „přečteme“ řešení

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

## Frobeniova věta

Z předchozího postupu a z ilustrace na obr. 2 vidíme, že  $h(S) = 3$  a  $h(S|r) = 3$ . Protože se hodnoty rovnají, má soustava řešení a v tomto řešení je  $3 - 3 = 0$  parametrů, je tedy jednoznačné.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Obrázek 2: Hodnoty  $h(S)$  a  $h(S|r)$

## Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

**Řešení:**

## Gaussova eliminační metoda

Provedeme pouze Gaussovu eliminační metodu. Zapišeme si zadanou soustavu maticově a budeme ji upravovat.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{array}{c} \boxed{-2} \\ \boxed{-1} \end{array}}^{-1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\boxed{-1}}^{-1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Polední řádek však odpovídá rovnici

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2, \implies 0 = 2,$$

která samozřejmě nemá řešení a totéž platí o celé soustavě.

## Frobeniova věta

Obr. 3 ilustruje fakt, že  $h(S) = 2$  a  $h(S|r) = 3$ . Protože se hodnoty nerovnají, nemá tato soustava rovnic řešení.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Obrázek 3: Hodnoty  $h(S)$  a  $h(S|r)$