

Odhadněte hodnotu $\sqrt{e}$.

Hledanou hodnotu $\sqrt{e}$ lze zapsat jako $e^{\frac{1}{2}}$ a k jejímu určení využít funkce e^x resp. tečny či Taylorova polynomu k ní.

Nalezněme nejprve tečnu t_a funkce $f(x) = e^x$ v bodě $a = 0$. K tomu využijeme vztahu

$$(1) \quad t_a : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

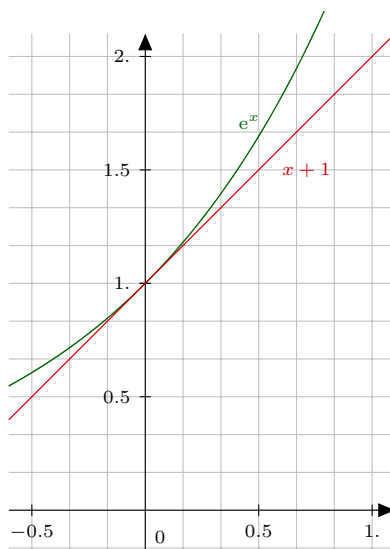
K zapsání rovnice tečny je tedy třeba znát hodnotu první derivaci funkce $f(x)$ v bodě a , a také funkční hodnotu v tomto bodě $f(a)$. Tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= e^0 = 1, \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

Odtud tedy máme

$$(2) \quad t_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1(x - 0) + 1 = x + 1.$$

V okolí bodu $a = 0$ lze tedy „nahradit“ funkci e^x lineární funkcí $x + 1$, viz obr. 1. K odhadu hodnoty $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ tedy poslouží dosazení $x = \frac{1}{2}$ do $x + 1$, takže máme $\sqrt{e} \approx 1.5$.



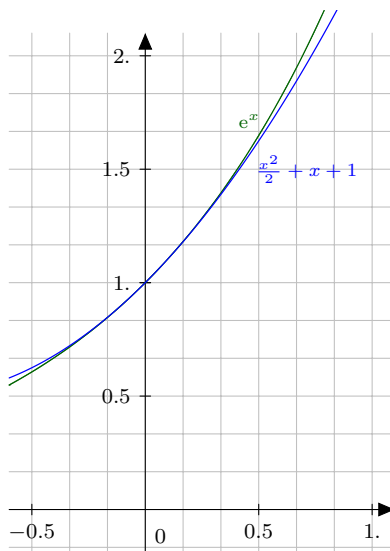
Obrázek 1: Tečna

Z obr. 1 lze také vidět, že provedená aproximace tečnou není úplně vhodná. Proto ji zpřesníme pomocí Taylorova polynomu $t_a^{(n)}(x)$, tj.

$$(3) \quad t_a^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x - a)^i,$$

kde $f^{(i)}(a)$ značí i -tou derivaci funkce $f(x)$ v bodě a . Před dalším postupem si ještě všimněme, že pro $n = 1$ dostáváme rovnici tečny.

Nejprve určíme Taylorův polynom stupně 2, tj. pro $n = 2$.



Obrázek 2: Taylor2

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= e^0 = 1, \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= e^0 = 1, \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= e^0 = 1, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} (4) \quad t_a^{(2)}(x) &= \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i = \frac{1}{0!} f^{(0)}(0)(x-0)^0 + \frac{1}{1!} f^{(1)}(0)(x-0)^1 + \frac{1}{2!} f^{(2)}(0)(x-0)^2 = \\ &= \frac{1}{1} f(0) + \frac{1}{1} f'(0)(x-0) + \frac{1}{2} f''(0)(x-0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Grafické znázornění je vyobrazeno na obr. 2, z něž by se dalo soudit, že již jde o „dobrou“ aproximaci. Ovšem uvědomíme-li si, že grafem $1 + x + \frac{x^2}{2}$ je parabola a grafem e^x je exponenciální křivka, což nás vede k myšlence, že i tuto aproximaci by bylo vhodné zlepšit. To lze provést přidáním dalších členů dle vzorce (3). Graf „exponenciály“ a „paraboly“ spolu s tečnou a Taylorovým polynomem třetí stupně je na obr. 3

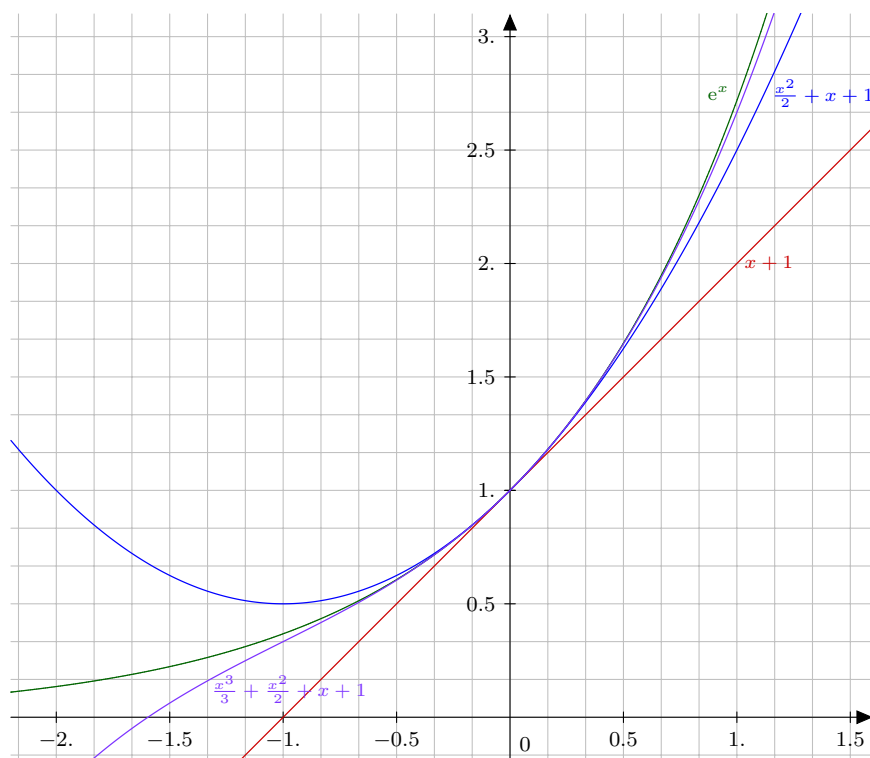
K sestavení $t_a^{(3)}(x)$ a $t_a^{(4)}(x)$ potřebujeme přidat třetí a čtvrtou derivaci. Máme tedy

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= e^0 = 1, \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= e^0 = 1, \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= e^0 = 1, \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= e^0 = 1, \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= e^0 = 1, \end{aligned}$$

a odtud

$$\begin{aligned} (5) \quad t_a^{(3)}(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \\ t_a^{(4)}(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}. \end{aligned}$$

Srovnání grafu funkce e^x , s grafy tečny $t_a(x)$ a Taylorových polynomů $t_a^{(2)}(x)$ a $t_a^{(3)}(x)$ je na obr. 3.



Obrázek 3: Srovnání

Na závěr srovnáme hodnotu $\sqrt{e} = 1.64872127 \dots$ vypočtenou kalkulatorem s odhady pomocí tečny $\frac{3}{2} = 1.5$, a pomocí Taylorova polynomu druhého, třetího resp. čtvrtého stupně, které jsou

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & t_a^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{13}{8} = 1.625, \\
 & t_a^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} = \frac{79}{48} = 1.6458\bar{3}, \\
 & t_a^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} = \frac{211}{128} = 1.6484375.
 \end{aligned}$$