

Spočtěte determinant

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Řešení: V případě determinantu řádu vyššího než 3, si již nelze pomoci schematem. K výpočtu musíme použít *Laplaceova rozvoje determinantu*, úpravy na trojúhelníkový tvar či kombinace těchto metod.

Laplaceův rozvoj

Laplaceův rozvoj převede výpočet determinantu čtvrtého řádu na čtyři determinanty řádu tři, a to dle následujícího vzorce

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|,$$

kde $\mathbf{A}_{ij}$ je matice, která z matice $\mathbf{A}$ vznikne vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce (viz. obr. 1).

Všimněme, že index i je se vzorci nemění, volíme si tedy libovolně, ale pevně, jeden řádek matice $\mathbf{A}$ podle něž rozvoj provádíme. Rozvoj lze však provést taky podle libovolného sloupce, příslušný vzorec pak vypadá jako

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|.$$

Tentokrát se tedy nemění „sloupcový“ index j .

Závěrem ještě poznamenejme, že číslo $(-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|$ nazýváme *algebraický doplněk prvku* a_{ij} .

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix} & 3 & \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\ 4 & 1 & \color{red}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Obrázek 1: Prvek a_{43} a matice $\mathbf{A}_{43}$

Nyní již provedme Laplaceův rozvoj determinantu $|\mathbf{A}|$ dle prvního řádku

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^4 a_{ij} (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}| = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \\ &+ 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -36 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 4 + (-4) \cdot (-44) = -36 + 8 + 12 + 176 = 160. \end{aligned}$$

Determinanty řádu tři již můžeme spočítat pomocí *Sarrusova* pravidla a dosazením dostáváme $|\mathbf{A}| = 160$.

Úprava

Sečteme-li v determinantu řádky jeho hodnota se nezmění. Stejně tak přičteme-li k řádku násobek jiného řádku. Změníme-li pozici dvou řádků, změni determinant znaménko. Obdobně pro sloupcové úpravy. Pokud řádek, či sloupec, vynásobíme nebo vydělíme, dojde ke stejné změně i u determinantu.

Upravujme tedy zadaný determinant

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \leftarrow_{+}^{-2} & \leftarrow_{+}^{-3} \end{array} \right]^{-4} \\ \leftarrow_{+} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \begin{array}{c} | \cdot -1 \\ | \cdot -1 \\ | \cdot -1 \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \leftarrow_{+}^{-2} & \leftarrow_{+}^{-7} \end{array} \right]^{-7} \\ \leftarrow_{+} \end{array} = \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -36 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow_{+} \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Po těchto úpravách, po uvedení matice do trojúhelníkového tvaru, již k výpočtu hodnoty determinantu stačí vynásobit prvky hlavní diagonály, tj.

$$|\mathbf{A}| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{vmatrix} = - (1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-40)) = 160.$$

Kombinace

Úpravami jsme determinant uvedli do tvaru v němž první sloupec obsahoval jediný nenulový prvek. Využijeme-li nyní Laplaceova rozvoje podle tohoto prvního sloupce, bude stačit spočítat pouze jeden

determinant řádu tři. Zbývající, které se v rozvoji objevují, jsou pronásobeny nulou. Platí tedy

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = - \left(1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} \right) = \\ &= - \left((1 \cdot 8 \cdot 13 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7 \cdot 2 \cdot 10) - (7 \cdot 8 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 13 + 1 \cdot 10 \cdot 10) \right) = \\ &= - \left((104 + 140 + 140) - (392 + 52 + 100) \right) = - (384 - 544) = - (-160) = 160. \end{aligned}$$