

K matici A nalezněte matici adjungovanou a inverzní

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Můžeme začít nalezením matice *inverzní* a z ní sestojit matici *adjungovanou*, nebo naopak nejprve sestavit matici *adjungovanou* a z ní získat matici *inverzní*. V obou případech však budeme využívat vztah

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A},$$

kde A^{-1} značí matici k A inverzní, $|A|$ determinant matice A , a konečně $\tilde{A}$ je matice k A adjungovaná.

Před samotným výpočtem ještě poznamenejme, že je-li $|A| = 0$ pak k matici A matice inverzní neexistuje, a připomeňme, že takovou matici nazýváme maticí *singulární*.

Inverzní - Adjungovaná

V tomto případě začneme určením inverzní matice. Pomocí elementárních řádkových úprav přecházíme z tvaru $(A|E)$ do tvaru $(E|A^{-1})$, kde E značí *jednotkovou* matici.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ -3 \\ -8 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} = \\ & = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot -1 \\ | \cdot -1 \\ | \cdot -1 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} = \\ & = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Známe-li matici A^{-1} pak z uvedeného vzorce můžeme vyjádřit $\tilde{A} = |A|A^{-1}$. K určení matice adjungované, tedy stačí spočítat determinant matice A a pronásobit jím matici A^{-1} . Protože je¹

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (3 + 24 + 24) - (27 + 16 + 4) = 51 - 47 = 4,$$

¹determinant není potřeba počítat Sarrusovým pravidlem, v prováděných úpravách se objevil *trojúhelníkový* tvar a součin prvků jeho hlavní diagonály $1 \cdot (-1) \cdot (-4)$ je roven determinantu $|A|$, přičemž prováděné úpravy hodnotu determinantu nemění.

je

$$\tilde{A} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{13}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 10 & -1 \\ 10 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Takto tedy máme určenu *inverzní* i *adjungovanou* matici k matici $\mathbf{A}$.

Adjungovaná – Inverzní

V této části sestavíme nejprve matici *adjungovanou* a z ní pak vytvoříme matici *inverzní*.

K tomu však opět budeme potřebovat determinant $|\mathbf{A}|$. Odhlédneme od faktu, že jej již známe a připomeňme si další z možných postupů jeho výpočtu, a to *Laplaceův rozvoj*

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|,$$

v němž číslo $(-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|$ nazýváme *algebraický doplněk prvku* a_{ij} , kde $\mathbf{A}_{ij}$ značí matici, která z matice $\mathbf{A}$ vznikne vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce. Viz. obr. 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Obrázek 1: Prvek a_{33} a matice $\mathbf{A}_{33}$

Provedeme-li Laplaceův rozvoj determinantu $|\mathbf{A}|$ např. dle třetího řádku, dostáváme

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^3 a_{3j} (-1)^{3+j} |\mathbf{A}_{3j}| = \\ &= 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4. \end{aligned}$$

Takto jsme nejen (opět) spočetli determinant, ale především jsme si připomenuli výpočet algebraických doplňků. Sestavme z nich nyní matici

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Zbývá dopočítat všech devět determinantů, získat matici adjungovanou a zní pak pomocí vztahu $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}}$ matici inverzní.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 10 & -1 \\ 10 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$