

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Hornicko-geologická fakulta



studijní opora

Vybrané kapitoly matematiky
VŠB-TUO

Jaro 2018

Obsah

1	Práce s vektory	1
2	Funkce více proměnných	7
3	Limita a derivace	14
4	Diferenciální počet	22
5	Gradient	35
6	Extrémy	42
7	Implicitní funkce	48
8	Vektorové pole	55
9	Dvojný integrál	62
10	Objem	75
11	Těžistě	79
12	Substituce ve dvojném integrálu	85
13	Křivkový integrál prvního druhu	94
14	Křivkový integrál II. druhu Greenova věta	102

Kapitola 1

Práce s vektory

Cíl:



Cílem kapitoly je seznámit se s použitím základních operací s vektory, a to především s jejich skalárním a vektorovým součinem.

Čas:



Prostudování kapitoly by vám nemělo zabrat více než dvě hodiny.

Předpoklady:



K úspěšnému absolvování je vhodné osvěžit si znalosti lineární algebry, práci s maticemi či výpočet determinantů.

Budete umět:



- sestavit vektor ze dvou bodů
- spočítat velikost vektoru
- určit úhel, který svírají dva vektory
- nalézt vektor kolmý ke dvěma zadaným vektorům

1.1 Řešená úloha

Zadání - 1.1:



Napište obecnou rovnici roviny trojúhelníku ΔABC , jehož vrcholy jsou body $A = [1, 2, 3]$, $B = [3, 1, 2]$ a $C = [2, 3, 1]$. Dále spočtete velikost jeho stran a vnitřních úhlů.

Stranám přiřadíme vektory dané příslušnými vrcholy. Pro stranu AB to bude vektor $c = B - A$, obdobně pro AC máme $b = C - A$ a konečně $a = C - B$. Máme tedy tři

vektory

$$\mathbf{a} = [-1, 2, -1], \quad \mathbf{b} = [1, 1, -2], \quad \mathbf{c} = [2, -1, -1].$$

Důležité:

Souřadnice vektoru určujeme jako rozdíl souřadnic jeho koncového a počátečního bodu.

Protože jsme vektory sestavili z jejich koncových bodů, odpovídají jejich velikosti délkám těchto (orientovaných) úseček a tedy i délkám stran trojúhelníka ΔABC . Určeme tedy tyto velikosti

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6},$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6},$$

$$\|\mathbf{c}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

Důležité:

Velikost vektoru $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, spočteme jako

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pro velikost vektoru $\mathbf{u}$ zavádíme symbol $\|\mathbf{u}\|$.

Z výpočtů vyplývá, že všechny strany mají stejnou velikost a že se tedy jedná o rovnostranný trojúhelník.¹ Odtud můžeme dále snadno i bez výpočtu určit velikosti jeho vnitřních úhlů. V rovnostranném trojúhelníku jsou všechny úhly stejné a rovnají se 60° .

Ověřme si však tento fakt také výpočtem. Úhel α je určen vektory $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$. K nalezení jeho velikosti proto využijeme *skalárního součinu* $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ vektorů $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) = 2 - 1 + 2 = 3.$$

Důležité:

Skalární součin vektorů $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ a $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ značíme a počítáme jako

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Jde tedy o součet součinů odpovídajících si složek obou vektorů a jeho výsledkem je číslo, tj. skalár.

¹Zamyslíme-li se nad výpočtem velikosti vektorů a prohlédneme-li si pozorně složky $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$, vidíme, že stačilo počítat pouze jednou.

²Značení $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ s „tečkou“ vede k anglickému názvu *dot product*. Pokud píšeme $a \cdot b$, kde a, b jsou čísla (*skaláry*), máme na mysli obvyklé násobení čísel.

Poznámka:

Ve fyzice je často potřeba zjistit výslednou sílu. Síla má svou velikost a směr, jde tedy o vektor $\mathbf{F} = [f_1, f_2, f_3]$. Chceme-li se však pohybovat směrem $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, pak velikost síly $\mathbf{F}$ působící v tomto směru spočteme jako skalární součin $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$.

Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu velikosti úhlu α , ke kterému budeme potřebovat znát skalární součin $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ a velikosti $\|\mathbf{b}\|$ a $\|\mathbf{c}\|$. Pro $\cos \alpha$ totiž platí:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 1.0472 \cong 60^\circ.$$

Stejně postupujeme v případě úhlů β a γ :

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{c}\|} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} = 2.0944 \cong 120^\circ,$$

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 1.0472 \cong 60^\circ.$$

To je ovšem ve sporu s naším správným předpokladem, že velikosti všech úhlů budou rovny 60° a také s tím, že součet vnitřních úhlů trojúhelníka je roven 180° . Kde visí ten zakopaný pes? Ve volbě vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$. Zatímco první z bodu $\mathbf{B}$ „vystupuje“, druhý do něj „vstupuje.“ Proto jsme nespočetli velikost úhlu β , ale jeho doplňku do úhlu přímého.³ Změníme-li u vektoru $\mathbf{c}$ znaménko, dostaneme $\cos \beta = \frac{1}{2}$ a $\beta = 60^\circ$, jak jsme předpokládali.

Důležité:

Pro úhel ϕ dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}.$$

Protože $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ jsou na sebe (nenulové) vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ kolmé, právě když $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

K získání obecné rovnice roviny ρ , v níž trojúhelník ΔABC leží, použijeme *vektoro- vého součinu*, jehož výsledkem je *vektor*, který je na oba násobené vektory kolmý. Takový vektor příslušející rovině ρ nazýváme *normálový vektor*. Označíme-li jej $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]$,⁴ pak má obecná rovnice roviny ρ následující tvar:

$$\rho : n_x x + n_y y + n_z z + d = 0.$$

Vynásobme tedy vektorově dva z vektorů ležících v rovině ρ , např. $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$, tj. spočteme $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.⁵ Postupovat můžeme pomocí vzorce využívajícího determinant s jednotkovými

³Nakreslete si obrázek :)

⁴Indexy x, y, z jsou zvoleny pro větší názornost.

⁵Značení $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ koresponduje s anglickým názvem *cross product*.

vektory souřadnicových os, tj. vektorů $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$, které jsou rovny $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$, $\mathbf{j} = [0, 1, 0]$ a $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$.

$$\begin{aligned}\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+1} \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-1 \cdot (-2) - (1 \cdot (-1))) \mathbf{i} - (2 \cdot (-2) - (-1 \cdot 1)) \mathbf{j} + ((2 \cdot 1) - (-1 \cdot 1)) \mathbf{k} = \\ &= 3[1, 0, 0] + 3[0, 1, 0] + 3[0, 0, 1] = [3, 0, 0] + [0, 3, 0] + [0, 0, 3] = [3, 3, 3].\end{aligned}$$

Důležité:

Vektorovým součinem vektorů $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ a $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ je vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, který je k oběma vektorům $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ kolmý. Spočít jej můžeme podle vzorce

$$\mathbf{w} = \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right].$$

Nalezli jsme, *normálový vektor* roviny ρ , tj. $\mathbf{n} = [3, 3, 3]$. Že jde o vektor kolmý k vektorům $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ si můžeme snadno ověřit pomocí skalárních součinů $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$ a $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}$, které jsou oba rovny 0.

Rovnice roviny ρ , v níž leží náš trojúhelník ΔABC , má tvar

$$\rho : 3x + 3y + 3z + d = 0.$$

Zbývá určit koeficient d . Za tím účelem do rovnice dosadíme některý z bodů roviny, např. $\mathbf{A}$, tak dostáváme $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + d = 0$, odtud $d = -18$ konečně rovnici $3x + 3y + 3z - 18 = 0$. Vydělením celé rovnice 3 převedeme rovnici roviny ρ do tvaru

$$\rho : x + y + z - 6 = 0.$$

Přestože již je úkol splněn, určíme vektorový součin, resp. determinant, ještě jednou, tentokrát bez použití Laplaceova rozvoje ale s pomocí přepisu prvních dvou sloupců. Namísto součinu $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ však spočítáme $\mathbf{c} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = [-3, -3, -3] = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Odtud je patrné, že vektorový součin není *komutativní*, záleží na pořadí násobení. Jeho změna se projeví změnou znaménka, což znamená, že výsledný vektor má opačný směr. Samozřejmě však jde stále o vektor kolmý k vektorům $\mathbf{b}, \mathbf{c}$. Stejná zůstává i jeho velikost $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$.

I velikost vektorového součinu $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ můžeme použít k určení velikosti úhlu ϕ sevřeného vektory $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$. Platí totiž $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| \sin \phi$, a odtud máme $\sin \phi = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a tedy $\phi = \frac{\pi}{3}$, což odpovídá 60° .

Důležité:

Pro úhel ϕ , který svírají vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, platí

$$\sin \phi = \frac{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Úhel samotný určíme takto $\phi = \arcsin \frac{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$.

Na závěr kapitoly si ještě ukážeme jak nalézt vektor, který má stejný směr jako vektor $\mathbf{v}$, ale jednotkovou velikost, tj. vektor *normovaný*⁶. K tomu stačí vektor vydělit jeho velikostí. Pro vektor $\mathbf{a} = [-1, 2, -1]$ to tedy je vektor $\mathbf{a}_n = \frac{1}{\sqrt{6}} [-1, 2, -1] = \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$.

Důležité:

Vektor $\mathbf{u}_n$, který má stejný směr jako $\mathbf{u}$ a jeho velikost $\|\mathbf{u}_n\| = 1$ nazýváme *normovaný* a neznáme jej jako

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u}.$$

1.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:

Vypočítejte vektorový součin $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Zjistěte, jaký úhel vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ svírají.

$$(1.1) \quad \mathbf{u} = [0, 2, -1], \mathbf{v} = [7, -1, 2].$$

$$(1.2) \quad \mathbf{u} = [1, 2, -1], \mathbf{v} = [5, -1, 0].$$

$$(1.3) \quad \mathbf{u} = [-2, 2, 0], \mathbf{v} = [3, 2, -1].$$

$$(1.4) \quad \mathbf{u} = [1, 2, -1], \mathbf{v} = [1, 2, 1].$$

$$(1.5) \quad \mathbf{u} = [1, -2, -1], \mathbf{v} = [1, 2, 1].$$

$$(1.6) \quad \mathbf{u} = [1, -2, -1], \mathbf{v} = [1, -1, 5].$$

$$(1.7) \quad \mathbf{u} = [-1, -1, 1], \mathbf{v} = [-1, 2, 3].$$

$$(1.8) \quad \mathbf{u} = [-1, -1, 2], \mathbf{v} = [-2, 1, 3].$$

⁶Neplést s vektorem normálovým.

Úloha:



Nalezněte jednotkový vektor kolmý k zadaným vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Spočtěte velikost úhlu, který vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ svírají.

$$(1.9) \quad \mathbf{u} = [1, 2, 3], \mathbf{v} = [3, 2, 1].$$

$$(1.13) \quad \mathbf{u} = [0, -2, 2], \mathbf{v} = [2, 1, 1].$$

$$(1.10) \quad \mathbf{u} = [0, 2, 3], \mathbf{v} = [3, 0, 1].$$

$$(1.14) \quad \mathbf{u} = [0, -3, 2], \mathbf{v} = [1, -2, 1].$$

$$(1.11) \quad \mathbf{u} = [0, -2, 3], \mathbf{v} = [2, 0, -1].$$

$$(1.15) \quad \mathbf{u} = [0, 3, 2], \mathbf{v} = [1, -2, 3].$$

$$(1.12) \quad \mathbf{u} = [0, -2, 2], \mathbf{v} = [2, 0, -1].$$

$$(1.16) \quad \mathbf{u} = [1, 3, 2], \mathbf{v} = [1, 0, 3].$$

Výsledek úlohy:



Vypočítejte vektorový součin $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Zjistěte, jaký úhel vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ svírají.

$$(1.1) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [3, -7, -14], \varphi = 104^\circ 5' 21''.$$

$$(1.5) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [0, -2, 4], \varphi = 131^\circ 48' 37''.$$

$$(1.2) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [-1, -5, -11], \varphi = 76^\circ 6' 8''.$$

$$(1.6) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [-11, -6, 1], \varphi = 99^\circ 2' 26''.$$

$$(1.3) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [-2, -2, -10], \varphi = 100^\circ 53' 36''.$$

$$(1.7) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [-5, 2, -3], \varphi = 72^\circ 1' 29''.$$

$$(1.4) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [4, -2, 0], \varphi = 48^\circ 11' 23''.$$

$$(1.8) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [-5, -1, -3], \varphi = 40^\circ 12' 11''.$$

Výsledek úlohy:



Nalezněte jednotkový vektor kolmý k zadaným vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Spočtěte velikost úhlu, který vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ svírají.

$$(1.9) \quad \mathbf{w}_n = \frac{1}{\sqrt{6}} [-1, 2, -1], \varphi = 44^\circ 24' 55''.$$

$$(1.13) \quad \mathbf{w}_n = \frac{1}{\sqrt{3}} [-1, 1, 1], \varphi = 90^\circ.$$

$$(1.10) \quad \mathbf{w}_n = \frac{1}{11} [2, 9, -6], \varphi = 74^\circ 44' 42''.$$

$$(1.14) \quad \mathbf{w}_n = \frac{1}{\sqrt{14}} [1, 2, 3], \varphi = 25^\circ 3' 57''.$$

$$(1.11) \quad \mathbf{w}_n = \frac{1}{\sqrt{14}} [1, 3, 2], \varphi = 1.95207111^\circ 50' 44''.$$

$$(1.15) \quad \mathbf{w}_n = \frac{1}{\sqrt{182}} [13, 2, -3], \varphi = 90^\circ.$$

$$(1.12) \quad \mathbf{w}_n = \frac{1}{3} [1, 2, 2], \varphi = 108^\circ 26' 6''.$$

$$(1.16) \quad \mathbf{w}_n = \frac{1}{\sqrt{91}} [9, -1, -3], \varphi = 53^\circ 43' 43''.$$

Kapitola 2

Funkce více proměnných

Těleso ponořené do tekutiny, která je v klidu, je nadlehčováno silou rovnající se tíze tekutiny stejného objemu, jako je ponořená část tělesa.

Archimedův zákon si v možná pamatujete již ze základní školy. A snad také umíte tento fyzikální zákon zapsat matematicky:

$$F_{vz} = V \cdot \rho \cdot g,$$

F_{vz} zde značí vztlačovou sílu, V je objem ponořené části, ρ je hustota kapaliny, do které je těleso ponořené a g je tíhové zrychlení.

Cíl:



V této kapitole se seznámíme s funkcí dvou, tří či více proměnných, naučíme se určovat její definiční obor. Pro funkci dvou proměnných sestojíme její graf, vrstevnice, bokorys a nárysnu.

Čas:



Prostudování kapitoly Vám zabere 3 hodiny.

Předpoklady:



V kapitole využijete znalosti funkce jedné proměnné, jejích vlastností, definičního oboru, grafu. Upotřebíme také soustavy rovnice či nerovnic více proměnných a za analytické geometrie rovnice rovinných útvarů, především přímek a kuželoseček.

Budete umět:



- Určit a graficky znázornit definiční obor funkce dvou nebo tří proměnných
- Vytvořit si představu o grafu funkce dvou proměnných

Výše zmíněný Archimedův zákon nám říká, že vztlačová síla tedy závisí na V , ρ a g . Vztlačová síla je funkcí V , ρ a g , což můžeme zpsat jako $F_{vz} = f(V, \rho, g)$.

Důležité:

Uvažujme neprázdnou množinu $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcí n proměnných nazýváme zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Množinu M nazýváme definičním oborem funkce f a značíme D_f . Oborem hodnot je množina všech hodnot, kterých funkce nabývá.

Obecně píšeme $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Vektor $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je *nezávislou* proměnnou, tj. *argument*, a y je proměnná *závislá*, tj. *funkční hodnota*.

Poznámka:

Nejvíce se budeme zabývat funkcí dvou, proto využijeme především zápis $z = f(x, y)$ nebo $z = f(\mathbf{A})$, kde $\mathbf{A}$ je bod $\mathbf{A} = [x, y] \in \mathbb{R}^2$. Obdobně $u = u(x, y, z)$ či $u = u(\mathbf{A})$ pro $\mathbf{A} = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$.

V uvedeném případě vztahové síly můžeme tedy mluvit o funkci tří proměnných. Budeme-li se i nadále držet našeho „fyzikálního“ příkladu, je jasné, že všechny nezávislé proměnné nabývají nezáporných hodnot¹ a stejně tak i velikost vztahové síly bude nezáporná. Definiční obor i obor hodnot je zde tedy dán. Není-li však je definiční obor zadán pak jím rozumíme množinu, kde existuje funkční hodnota daného výrazu.

Při určování definičního oboru funkce vycházíme z vlastností funkce jedné proměnné, což ilustruje další řešený příklad ??

2.1 Řešená úloha

Zadání - 2.1:

Určete a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - 4y^2) + \sqrt{4x^2 + y^2 - 1}.$$

Argument logaritmické funkce musí být vždy kladný, proto vyžadujeme splnění podmínky

$$1 - x^2 - 4y^2 > 0 \Rightarrow 1 > x^2 + 4y^2.$$

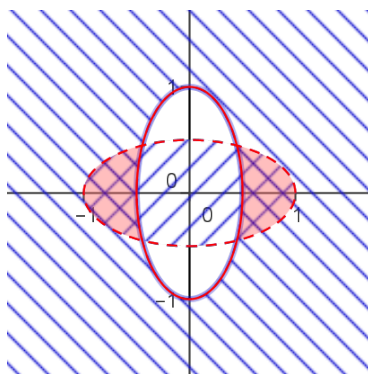
Rovnice $1 = x^2 + 4y^2$ je rovnicí elipsy se středem v počátku, s hlavní poloosou ležící na ose x . Délka hlavní poloosy je 1 a délky poloosy vedlejší je $\frac{1}{2}$. Uvedenou podmínku pak splňují všechny body „uvnitř elipsy.“

Podmínka pro $\sqrt{4x^2 + y^2 - 1}$ je obdobná,

$$4x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 + y^2 \geq 1.$$

I zde se jedná o elipsu, tentokrát s hlavní poloosou na ose y . Podmínku splňují všechny body „vně elipsy.“ Protože však v podmínce připouštíme rovnost, je podmínka splněna i body samotné elipsy.

¹těžko si představit těleso se záporným objemem či kapalinu se zápornou hustotou



Obr. 2.1: Náčrtek definičního oboru fce

Výsledným definičním obor je množina všech bodů roviny, ve kterých je splněna první a zároveň druhá podmínka. Na obrázku 2.1 je definiční obor funkce $f(x, y)$ zvýrazněn červenou barvou. Množinově $\mathcal{D}_f$ zapisujeme takto:

$$\mathcal{D}_f = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid 1 > x^2 + 4y^2 \wedge 4x^2 + y^2 \geq 1 \right\}.$$

Poznámka:

Na rozdíl od funkce jedné proměnné nelze definiční obor funkce více proměnných zapsat jako *interval* a musíme používat množinový zápis. Ve výsledku jsou **modře** zvýrazněny *složené-množinové závorky*, **zeleně** jaké body bereme do úvahy a **červená**, nejdůležitější část, popisuje podmínku, kterou musí body splňovat.

Důležité:

Rovnice kuželoseček:

Kružnice: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$,

kde r je poloměr a $\mathcal{S} = [x_0, y_0]$ střed kružnice,

Elipsa: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$,

kde a je velikost hlavní poloosy, b velikost vedlejší poloosy a $\mathcal{S} = [x_0, y_0]$ střed elipsy, ohniska hyperboly leží na ose x ,

Elipsa: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$,

kde a je velikost hlavní poloosy, b velikost vedlejší poloosy a $\mathcal{S} = [x_0, y_0]$ střed elipsy, ohniska hyperboly leží na ose y ,

Hyperbola: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$,

kde a je velikost hlavní poloosy, b velikost vedlejší poloosy a $\mathbf{S} = [x_0, y_0]$ střed hyperboly, ohniska hyperboly leží na ose x ,

Hyperbola: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1,$

kde a je velikost hlavní poloosy, b velikost vedlejší poloosy a $\mathbf{S} = [x_0, y_0]$ střed hyperboly, ohniska hyperboly leží na ose y ,

Parabola: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),$

kde p je parametr a $\mathbf{V} = [x_0, y_0]$ vrchol paraboly, osa paraboly $x = x_0$ rovnoběžná s osou y

Parabola: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),$

kde p je parametr a $\mathbf{V} = [x_0, y_0]$ vrchol paraboly, osa paraboly $y = y_0$ rovnoběžná s osou x .

Určení oboru hodnot samozřejmě může být obtížnější než v právě vyřešeném příkladě. Ještě těžším úkolem však je vykreslení grafu funkce. Pro funkci dvou proměnných totiž jde o trojrozměrnou plochu, pro funkci tří proměnných o plochu čtyřrozměrnou.

Důležité:

Grafem funkce n proměnných $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je množina

$$\mathcal{G}_f = \{[x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)] \in \mathbb{R}^{n+1} | \forall [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathcal{D}_f\}.$$

Bude-li pro nás proměnná x představovat *východní délku*, y *severní šířku*, můžeme funkční hodnotu $f(x, y)$ chápat jako *nadmořskou výšku*. Zůstaneme-li u této analogie a představíme-li si dále geografickou mapu, jak ji známe z atlasů, uvidíme zelené nížiny a hnědé hory, spolu s vrstevnicemi, které spojují body se stejnou nadmořskou výškou.

Následující řešený příklad popisuje postup, jak získat představu o grafu funkce $f(x, y)$.

Zadání - 2.2:

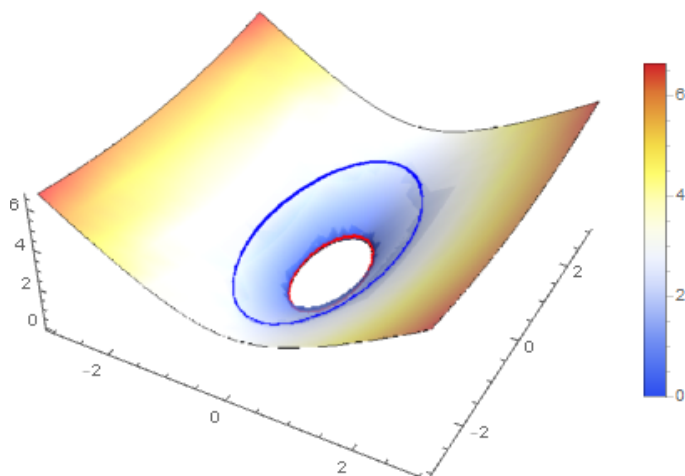
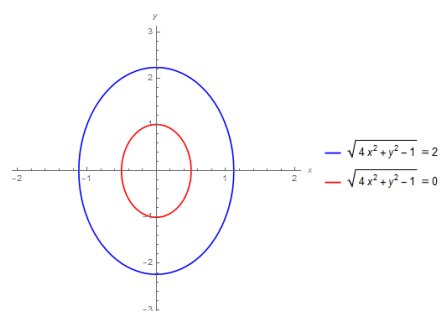
Nakreslete graf funkce $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 1}$.

Jde o funkci, kterou jsme již vyšetřovali v rámci předchozího řešeného příkladu. Známe tedy její definiční obor $\mathcal{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 1 \geq 0\}$ a z obrázku 2.1 víme, že jde o body roviny „vně“ elipsy $4x^2 + y^2 = 1$.

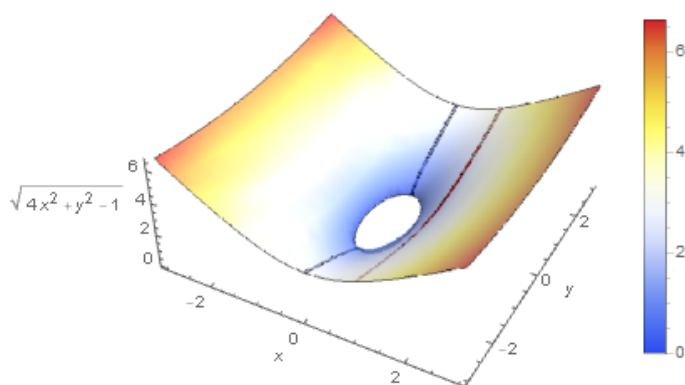
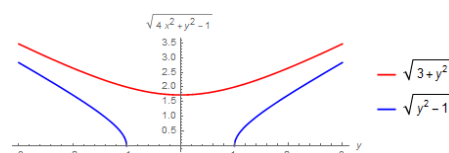
K určení a zakreslení vrstevnic, je třeba odpovědět na otázku, které body mají stejnou funkční hodnotu, tj. řešit rovnici $f(x, y) = k$ pro $k \in \mathcal{H}_f$. Protože jde o odmocninu, bude zde $k \geq 0$. Položme tedy nejprve $k = 0$, tak máme $4x^2 + y^2 - 1 = 0$ resp. $4x^2 + y^2 = 1$, což znamená, že „nultou“ vrstevnicí je „hraniční“ elipsa definičního oboru.

Zvolme si dále například $k = 2$, pak hledáme $\sqrt{4x^2 + y^2 - 1} = 2$, tedy $4x^2 + y^2 - 1 = 4$ tj. $4x^2 + y^2 = 5$ a odsud již vidíme, že i tato vrstevnice má tvar elipsy. Pokud budeme

postupovat obecně, pak z rovnice $\sqrt{4x^2 + y^2 - 1} = k$ dojdeme k $4x^2 + y^2 = k^2 + 1$, což znamená, že tvar elipsy mají všechny vrstevnice grafu funkce $f(x, y)$. Na obrázku 2.2 jsou vrstevnice zaznačeny v grafu funkce a obrázek 2.3 pak ukazuje tyto vrstevnice zakreslené v rovině xy , přitom **červená vrstevnice** odpovídá hladině $f(x, y) = 0$ a **modrá hladině** $f(x, y) = 2$.

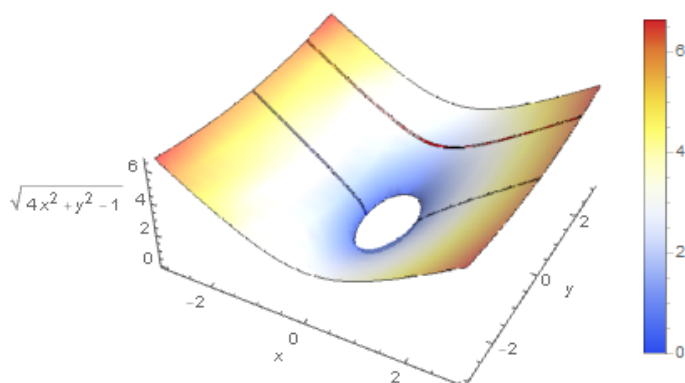
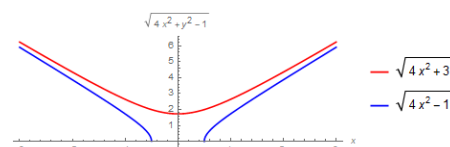
Obr. 2.2: Graf $f(x, y)$ s vrstevnicemi

Obr. 2.3: Vrstevnice

Obr. 2.4: Graf $f(x, y)$ 

Obr. 2.5: Nárysna

Při určování vrstevnic jsme „fixovali“ funkční hodnotu, pokud si budeme pevně volit $x = k, k \in \mathbb{R}$ resp. $y = k, k \in \mathbb{R}$ pak dostaneme „nárysnu“ resp. „bokorysnu“. To je znázorněna na grafech 2.6 a 2.7 resp. obrázcích 2.4 a 2.5, a to pro $x = 0$ modře a $x = 1$ červeně resp. $y = 0$ modře a $y = 2$ červeně.

Obr. 2.6: Graf $f(x, y)$ 

Obr. 2.7: Bokorysna

2.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:



Určete a zakreslete definiční obor $f(x, y)$, zakreslete vrstevnice.

$$(2.1) f(x, y) = \ln(x - y^2 + 1)$$

$$(2.5) f(x, y) = \ln(1 - 2x - 3y)$$

$$(2.2) f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 3)$$

$$(2.6) f(x, y) = \ln xy$$

$$(2.3) f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$$

$$(2.7) f(x, y) = \sqrt{4x - y^2}$$

$$(2.4) f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{1 - y}}$$

$$(2.8) f(x, y) = \sqrt{\frac{y - 1}{x}}$$

Výsledek úlohy:



Určete a zakreslete definiční obor $f(x, y)$, zakreslete vrstevnice.

$$(2.1) \mathcal{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2 - 1\},$$

paraboly $x = y^2 + e^k - 1, k \in \mathbb{R}$.

$$(2.2) \mathcal{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

kružnice $x^2 + y^2 = 3 + \sin k, k \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

$$(2.3) \mathcal{D}_f = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x \geq 0 \wedge y \leq \frac{1}{x} \right) \vee \left(x < 0 \wedge \frac{1}{x} < y \right) \right\},$$

hyperboly $xy = k - 1, k \in (0, \infty)$, a přímky $x = 0, y = 0$ pro $f(x, y) = 1$.

$$(2.4) \mathcal{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x \geq 0 \wedge y < 1) \vee (x \leq 0 \wedge y > 1)\},$$

přímky $x = k^2(1 - y), k \in (0, \infty)$.

$$(2.5) \quad \mathcal{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - 2x - 3y > 0\},$$

přímky $1 - 2x - 3y = e^k, k \in \mathbb{R}$.

$$(2.6) \quad \mathcal{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\},$$

hyperboly $xy = e^k, k \in \mathbb{R}$.

$$(2.7) \quad \mathcal{D}_f = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \frac{1}{4}y^2\right\},$$

paraboly $x = \frac{1}{4}(y^2 + k), k \in (0, \infty)$.

$$(2.8) \quad \mathcal{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1 - x, y \leq x + 1, x \neq 0\},$$

přímky $y = k^2x + 1, k \in (0, \infty)$.

Kapitola 3

Limita a derivace

Cíl:



Cílem této kapitoly je seznámit se s pojmem limita funkce více proměnných, spojitost funkce. A také s parciální derivací funkce více proměnných.

Čas:



K prostudování kapitoly si vyhradte 4 hodiny.

Předpoklady:



K snadnějšímu uchopení nových pojmů si připomeňte vlastnosti funkcí jedné proměnné, definici limity a postup jejího výpočtu. Dále pak je vhodné osvěžit pojem derivace funkce jedné proměnné.

Budete umět:



- vypočítat limitu funkce dvou proměnných
- zodpovědět otázku, kdy je funkce dvou proměnných spojitá

V kapitole 2 jsme definovali a vyšetřovali funkce dvou proměnných, určovali jejich definiční obory a odhadovali, jak vypadá jejich graf. V případě, že bod patří do definičního oboru, stačí jej dosadit do funkčního předpisu a tak získat odpovídající funkční hodnotu. Co se však stane, když bod definičnímu oboru nepatří? Na první pohled se taková otázka může jevit jako nesmyslná, je-li však vyšetřovaný bod definičnímu oboru „dostatečně blízko“, bylo by dobré mít nástroj, který by pomohl odhadnout chování funkce. Takovým nástrojem je *limita funkce*.

Důležité:



Limita je číselná hodnota, ke které se blíží funkční hodnoty, když se hodnoty argu-

mentu přibližují k danému bodu (který do $\mathcal{D}_f$ patřit nemusí). Zapisujeme:

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} f(x,y) = a$$

Jak lze při výpočtu limity funkce postupovat si nejlépe ukážeme na ilustračním příkladu.

3.1 Řešená úloha

Zadání - 3.1:

Spočtěte limity:

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [1,-1]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}, \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [1,1]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}, \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}.$$

Není těžké určit, že definičním oborem funkce $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}$, je množina

$$\mathcal{D}(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}.$$

Bod $[1, -1]$ tedy definičnímu oboru patří a proto lze první z limit vyřešit pouhým dosazením, tj.

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [1,-1]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} = \frac{1^2 - (-1)^2}{1^3 - (-1)^3} = \frac{1 - 1}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Body $[1, 1]$ a $[0, 0]$ však definičnímu oboru nepatří, s pouhým dosazením si tu nevystačíme. Pokud se o něj přesto pokusíme dostáváme $f(1, 1) = \frac{0}{0}$ resp. $f(0, 0) = \frac{0}{0}$, tedy neurčitý výraz.

Provedeme-li však několik drobných algebraických úprav, situace se může zjednodušit. Začneme limitou v bodě $[1, 1]$

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [1,1]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} = \lim_{[x,y] \rightarrow [1,1]} \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{(x-y)}(x^2 + xy + y^2)} = \lim_{[x,y] \rightarrow [1,1]} \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} = \frac{2}{3}.$$

Do tvaru, který jsme takto obdrželi, již můžeme dosadit, a limita je spočtena.

Výpočet jsme opřeli o následující fakt:

Důležité:

Jestliže pro funkce $f(x,y)$ a $g(x,y)$ platí $f(x,y) = g(x,y)$ pro všechna $[x,y] \neq [x_0,y_0]$ z určitého δ -okolí bodu $[x_0,y_0]$ a má-li funkce $g(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ limitu A , pak má také funkce $f(x,y)$ v tomto bodě limitu rovnou A .

Říkáme, že funkce $f(x,y)$ má v bodě $[x_0,y_0]$ *odstranitelnou nespojitost*.

Bohužel použití stejné úpravy také v posledním příkladě, pro bod $[0, 0]$, k výsledku nevede.

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} = \frac{0}{0}.$$

Stále totiž dostáváme neurčitý výraz „ $\frac{0}{0}$ “.

Než se pokusíme „určit“ tento neurčitý výraz, připomeňme si něco z vlastností a výpočetních postupů limit funkce jedné proměnné.

V případě $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ je možné se k bodu a „blížit“ pouze po ose x , a to buď zleva nebo zprava. Pokud jsme dokázali určit limitu zprava $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ i zleva $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a tyto se rovnaly, pak jsme měli určenou „celou“ limitu. V případě nerovnosti „levé“ a „pravé“ limity jsme konstatovali, že limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ neexistuje.

Zkusme si touto analogií pomoci i u limity funkce dvou proměnných. Drobnou změnou zde je, že směrů a „cest“, kterými se můžeme k bodu, v němž limitu hledáme, „připlížit“ je nekonečně mnoho. To je samozřejmě výhodou i nevýhodou zároveň.

Ze všech „cest“ si můžeme libovolně vybrat takové, se kterými se nám bude dobře pracovat. Dojdeme-li pro dvě různé „cesty“ k různým výsledkům můžeme prohlásit, že limita neexistuje. Ovšem pozor! Dojdeme-li pro dvě různé „cesty“ ke stejným výsledkům, nemusí to znamenat, že jsme limitu našli, neboť může existovat další „cesta“ s výsledkem jiným.

Teď se však již vraťme k našemu příkladu a zvolme si vhodnou cestu. Budeme se k bodu $[0, 0]$ blížit po ose x , kterou lze zapsat rovnicí $y = 0$. Díky této volbě můžeme vyšetřovaný výraz dále zjednodušit, a to následovně:

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x + 0}{x^2 + x \cdot 0 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

O poslední limitě již lze říct, že neexistuje, protože je $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Stejný závěr je platný i pro $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}$.

Důležité:

Limita „zleva“ se nerovná limitě „zprava“, proto limita neexistuje.

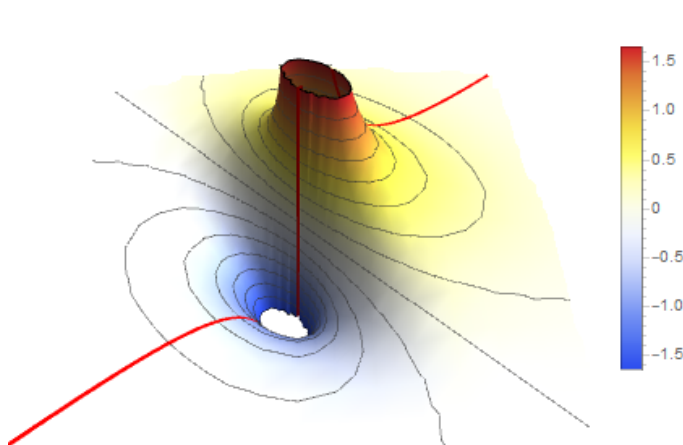
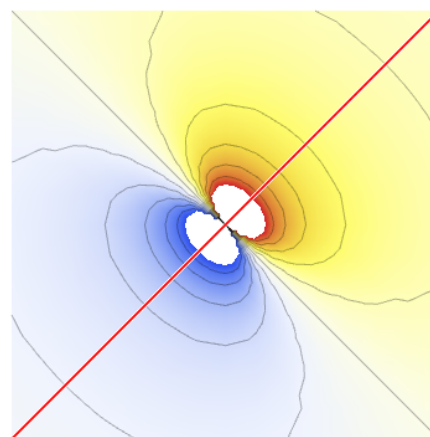
Přestože jsme již zjistili, že $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]}$ neexistuje, ukažme si ještě jeden z možných postupů. Představme si, že se bodu $[0, 0]$ chceme přiblížit po přímkě. Přímkou procházející počátkem, lze zapsat (například) jako $y = kx$ a odtud psát

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + kx}{x^2 + x \cdot kx + (kx)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + k)}{x^2(1 + k + k^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + k}{x(1 + k + k^2)}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že výsledek limity závisí na koeficientu k , tj. závisí na zvolené cestě, což je dalším argumentem ukazujícím na neexistenci hledané limity.

Poznámka:

Přímky procházející počátkem jsme popsali rovnicí $y = kx$. Pro osu x je koeficient $k = 0$. Osa y v takovém tvaru zapsat nejde, píšeme pro ni $x = 0$ nebo použijeme *parametrický* tvar rovnice přímky.

Obr. 3.1: Graf $f(x, y)$ 

Obr. 3.2: Vrstevnice

Na obrázku 3.1 resp. 3.2 je zobrazen graf funkce resp. jeho vrstevnice, na obou je červeně zvýrazněna přímka $y = x$, na níž leží body nepatřící do $\mathcal{D}_f$. Svislá červená přímka je „reakcí“ vykreslovacího programu na neexistenci limity v bodě $[0, 0]$. Jak bylo výpočtem ukázáno, hodnoty „z jedné strany“ se blíží $-\infty$ (v grafu modře) a „ze strany druhé“ se blíží ∞ (v grafu červeně).¹

Naproti tomu v bodech $[a, a]$, v nichž $a \neq 0$, limita existuje², přičemž platí $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} = \frac{2}{3a}$ a tuto hodnotu program používá.

Důležité:

Při výpočtu limity mohou nastat tyto možnosti:

- limita existuje jako funkční hodnota $\Rightarrow$ funkce je v bodě spojitá
- limita existuje jako funkční hodnota upraveného výrazu $\Rightarrow$ funkce má v bodě odstranitelnou nespojitost
- limita neexistuje $\Rightarrow$ funkce má v bodě neodstranitelnou nespojitost

Aparát limit matematika používá v mnohem větší míře a více než jen k odhadu funkční hodnoty v „problémových bodech“. A to si ukážeme v dalším řešeném příkladu.

¹s vykreslením samotného nekonečna je mají programy obecně dost problémů a i proto je zde graf „useknut“ již na hladině 1.5.

²důkaz a výpočet ponechán laskavému čtenáři jako cvičení

Zadání - 3.2:

Jaké hodnoty nabývá funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $A = [1, -1]$? Jak se tato hodnota změní, když argument x zvětšíme resp. zmenšíme o 3, 2 a 1?

Odpověď na první otázku se triviální³, dosazením argumentu do funkčního předpisu dostáváme $f(1, -1) = 1^2 + (-1)^2 = 2$.

Odpověď na další otázky shrneme v tabulce 3.1, v níž Δx značí o kolik argument x měníme a Δf značí o kolik se změnila funkční hodnota. V prvním řádku vidíme, že když k x přidáme -3 , změní se funkční hodnota o 3. Počítáme totiž $f(1 + (-3), -1) = f(-2, -1) = (-2)^2 + (-1)^2 = 5$, což je o 3 více než původních $f(1, -1) = 2$.

Z tabulky vidíme, že velká změna může, ale nemusí, vyvolat velkou změnu, že zmenšení argumentu nemusí nutně znamenat zmenšení funkční hodnoty. To není nic překvapujícího, podobné jevy se objevovaly již u funkce jedné proměnné, kde se v této souvislosti hovořilo o (ne)rostoucí či (ne)klesající funkci.

Tabulka 3.1 je doplněna ještě o jeden sloupec, v němž sledujeme podíl $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Opustme na chvíli „přísnou“ a přesnou matematiku a vnímejme funkci, resp. její graf, jako zvlněný reliéf krajiny s nadmořskou výškou $f(x, y)$ a Δx jako počet kroků/metrů/mil v daném, x -ovém, směru. Pak Δf značí počet výškových kroků/metrů/mil a podíl $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ je průměrná výška jednoho kroku. Podíváme-li se tedy do posledního sloupce tabulky 3.1, měli bychom se o naši krajině/funkci něco dovědět.

Bohužel informace, kterou získáváme není moc užitečná, a to protože naše kroky jsou příliš velké. Například poslední řádek říká, že jsme se posunuli o tři x -ové kroky a vystoupali 15 výškových, což značí, že jeden krok nás vynesl o 5. Z tabulky však také vidíme, že náš první krok přinesl jen 3 výškové a krok poslední 7.

Δx	Δf	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
-3	3	-1
-2	0	0
-1	-1	1
0	0	$\frac{0}{0}$
1	3	3
2	8	4
3	15	5

Tabulka 3.1:
 $\Delta : -3, \dots, 3$

Δx	Δf	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
-0.3	-0.51	1.7
-0.2	-0.36	1.8
-0.1	-0.19	1.9
0	0	$\frac{0}{0}$
0.1	0.21	2.1
0.2	0.44	2.2
0.3	0.69	2.3

Tabulka 3.2:
 $\Delta : -0.3, \dots, 0.3$

Δx	Δf	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
-0.03	-0.0591	1.97
-0.02	-0.0396	1.98
-0.01	-0.0199	1.99
0	0	$\frac{0}{0}$
0.01	0.0201	2.01
0.02	0.0404	2.02
0.03	0.0609	2.03

Tabulka 3.3:
 $\Delta : -0.03, \dots, 0.03$

Je-li tato informace „nežitečná“ z důvodu velké délky, musíme kroky zkrátit. V tabulce 3.2 resp. 3.3 postupujeme po krocích 0.1 resp. 0.01 ve směru osy x . Stejně jako v tabulce 3.1 je v uprostřed posledních sloupce neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, ovšem jinak zde lze vypořádat, že ostatní hodnoty podílu jsou blízké číslu 2.

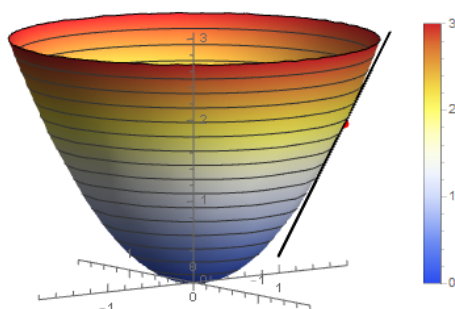
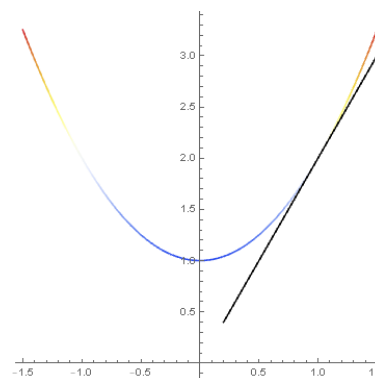
³I když i zde se dá udělat chyba. Pozor na znaménka!

Kroky se zmenšují, jejich délka se blíží nule. Hodnoty podílu se blíží. Neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Ano limita.

Vyšetřujeme podíl $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, v němž Δf značí o kolik se změní funkční hodnota, když se argument x změní o Δx , popíšeme jej tedy přesněji a obecněji, tj. nejen pro bod $[1, -1]$, a pro libovolný $[x, y] \in \mathcal{D}_f$. A přidejme i zmíněnou limitu.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} (x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x + \Delta x = 2x. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do výsledku $x = 1$ dostáváme opravdu 2, které byly blízké tabulkové hodnoty podílu $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Tento výsledek můžeme „přeložit“ tak, že velikost změny x , tj. Δx má za následek změnu funkční hodnoty Δf o velikosti $2\Delta x$. To vše však platí pokud výchozí pozici je $x = 1$ a, jak je z tabulek patrné, pouze pro „ne moc velké“ Δx .

Obr. 3.3: Graf $f(x, y)$ s tečnou

Obr. 3.4: Bokorysna

Na obrázku 3.3 je graf funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ spolu s tečnou. Obrázek 3.4 je pohled na celou situaci v bokorysně pro $y = -1$, v níž platí $f(x, y) = f(x, -1) = x^2 + 1$. Obdobně bychom ukázali, že i ostatní bokorysny a nárysny mají tvar parabol. Grafem funkce $f(x, y)$ je *rotační paraboloid*.

Poznamenejme, že spočtená limita je v matematice natolik důležitá, že si zaslouží vlastní jméno. Jde o *parciální* derivaci funkce. Parciální zde značí „částečnou“ v tom smyslu, že funkce je derivována pouze podle jedné z proměnných.

Důležité:

Parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle x , resp. podle y , nazýváme limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \text{ resp. } \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $\mathbf{A} = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}_f$ je limita

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Obdobně definujeme parciální derivace podle y či parciální derivace funkcí více proměnných.

Výpočtu a použití parciálních derivací se budeme dále věnovat v následujících kapitolách. Přitom však nebudeme užívat definční limity, ale vzorce pro derivace elementárních funkcí.

3.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha: _____

Vypočítejte limitu.



$$(3.1) \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [2,2]} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}.$$

$$(3.2) \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} \frac{x^3 y - x y^3 + 1}{(x - y)^3}.$$

$$(3.3) \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x - 2y}{3x + y}.$$

$$(3.4) \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{y}{x - y}.$$

$$(3.5) \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [-2,0]} \frac{x^2 y + 3xy + 2y}{x^2 y - 4y}.$$

$$(3.6) \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} \frac{x + y^3}{y - x^3}.$$

$$(3.7) \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x + y^3}{y - x^3}.$$

$$(3.8) \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [2,-1]} \frac{x^2 y^2 - x^2 - 4y^2 + 4}{xy - 2y + x - 2}.$$

Úloha: _____

Dle definice spočtěte derivaci $f(x, y)$.



$$(3.9) \quad f(x, y) = x - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(3.10) \quad f(x, y) = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(3.11) \quad f(x, y) = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(3.12) \quad f(x, y) = 3xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(3.13) \quad f(x, y) = \frac{2x}{y^2 - 1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(3.14) \quad f(x, y) = 1 - \left(\frac{x}{2} - y^2\right)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(3.15) \quad f(x, y, z) = 2x - 3yz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$(3.16) \quad f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

Výsledek úlohy: _____

Vypočítejte limitu.



$$(3.1) \quad 8,$$

$$(3.2) \quad 5,$$

$$(3.3) \quad \text{neexistuje.}$$

$$(3.4) \quad \text{neexistuje.}$$

$$(3.5) \quad \frac{1}{4}$$

$$(3.6) \quad 9,$$

$$(3.7) \quad \text{neexistuje,}$$

$$(3.8) \quad -8,$$

Výsledek úlohy: _____



Dle definice spočtete derivaci $f(x, y)$.

$$(3.9) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

$$(3.12) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy,$$

$$(3.15) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -9yz^2,$$

$$(3.10) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y},$$

$$(3.13) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4xy}{(y^2 - 1)^2},$$

$$(3.16) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + 1},$$

$$(3.11) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2},$$

$$(3.14) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - \frac{x}{2},$$

Kapitola 4

Diferenciální počet funkcí více proměnných tečná rovina, diferenciál, Taylorův polynom

V kapitole 3 jsme pomocí limit definovali parciální derivace funkce více proměnných a jen letmo jsme se zmínili o jejich souvislostech tečnou. Správnější však je mluvit o tečné rovině neboť, jak jsme si v kapitole 2 ukázali, je grafem funkce $f(x, y)$ trojrozměrná plocha.

Cíl:



V této kapitole se podrobněji seznámíme a naučíme pracovat s parciálními derivacemi funkce více proměnných, a to i derivacemi vyšších řádů. Využijeme jich k určení totálního diferenciálu, výpočtu tečné roviny, normály a Taylorova polynomu. Přičemž si ukážeme i jejich využití.

Čas:



Kapitola je obsáhlejší a bude na ni v dalším hodně odkazováno, její pečlivé prostudování zabere 5 hodin.

Předpoklady:



Poznatky diferenciálního počtu rozvíjejí jeho teorii pro funkci jedné proměnné. Zopakujte si derivaci funkce jedné proměnné, geometrický význam derivace funkce v bodě. Postup určení tečny grafu funkce, výpočet totálního diferenciálu a Taylorova polynomu.

Než přistoupíme k řešenému příkladu 4.1, v němž ke grafu funkce sestrojíme tečnou rovinu, připomeneme si některé ze vzorců pro výpočet derivací. Výpočet pomocí definiční limity, viz str. 3.1, by byl přinejmenším zdoluhavý. Zopakujeme si vzorce pro derivace funkce jedné proměnné. A to nejdříve derivace elementárních funkcí a poté i pravidla

derivování.

Důležité:

Derivace elementárních funkcí

$$c' = 0, \quad c \in \mathbb{R}, c \text{ konst.},$$

$$x' = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, e \text{ Eulerovo číslo},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}, x > 0,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}, \quad x > 0, n \in \mathbb{R}, n \neq -1,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \text{ konst.},$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \in \mathbb{R}, a > 0, \\ a \neq 1, a \text{ konst.},$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

V následujících vzorcích značí $f(x)$ resp. $g(x)$ funkci jedné proměnné a $f'(x)$ resp. $g'(x)$ její derivaci dle x a dále $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Důležité:

- $(\alpha f(x) \pm \beta g(x))' = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x),$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0,$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$

4.1 Řešené úlohy

Zadání - 4.1:

K funkci $f(x, y, z) = x\sqrt{2x - yz^2}$ spočítejte následující derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$.

Jak již bylo zmíněno v kapitole 3, str. 19, $\frac{\partial f}{\partial x}$ značí parciální derivaci funkce f podle x . V případě $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ jde o druhou parciální derivaci, přičemž nejprve derivujeme podle x a poté podle z . Derivace lze zapsat pomocí limit:

Poznámka:

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ funkce $f(x, y)$ jsou limity

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z + \Delta z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\Delta z}.\end{aligned}$$

Ovšem zde budeme derivovat s pomocí výše uvedených vzorců. Nejprve si, pro větší názornost, funkci obarvíme a rozebereme $x\sqrt{2x - yz^2}$. Tak si spíše všimneme, že se jedná o součin funkce $u(x, y, z) = x$ a funkce $v(x, y, z) = \sqrt{2x - yz^2}$, což je funkce složená. Nejprve proto využijeme součinnový vzorec:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} v(x, y, z) + u(x, y, z) \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} \sqrt{2x - yz^2} + x \frac{\partial \sqrt{2x - yz^2}}{\partial x} = \\ &= 1 \sqrt{2x - yz^2} + x \frac{\partial \sqrt{2x - yz^2}}{\partial x} = \\ &= \end{aligned}$$

K derivaci $\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}$ použijeme vzorec pro derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\partial \sqrt{2x - yz^2}}{\partial x} = \frac{\partial (2x - yz^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{1}{2} (2x - yz^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial 2x - yz^2}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{2} (2x - yz^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial 2x}{\partial x} - \frac{\partial yz^2}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (2x - yz^2)^{-\frac{1}{2}} (2 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2x - yz^2}}\end{aligned}$$

Zkombinujeme oba mezivýsledky a máme hledanou derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \sqrt{2x - yz^2} + \frac{x}{\sqrt{2x - yz^2}}.$$

Další úkolem je výpočet tzv. *smíšené* derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, proto budeme dále derivovat, a to $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle z .

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial z} = \frac{\partial \left(\sqrt{2x - yz^2} + \frac{x}{\sqrt{2x - yz^2}} \right)}{\partial z} = \frac{\partial \left((2x - yz^2)^{\frac{1}{2}} + x(2x - yz^2)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial (2x - yz^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial z} + \frac{\partial x(2x - yz^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z} = \frac{\partial (2x - yz^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial z} + x \frac{\partial (2x - yz^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{2} (2x - yz^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (2x - yz^2)}{\partial z} - \frac{1}{2} (2x - yz^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial (2x - yz^2)}{\partial z} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (2x - yz^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2yz) - \frac{1}{2} (2x - yz^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2yz) = \\
&= -\frac{yz}{\sqrt{2x - yz^2}} + \frac{yz}{\sqrt{(2x - yz^2)^3}}.^1
\end{aligned}$$

Poznámka:

Hlavní změnou oproti derivaci funkce jedné proměnné je samozřejmě výskyt více proměnných. Ovšem stačí na paměti, že *derivace popisuje změnu závislé proměnné v závislosti na proměnné nezávislé*. Jak jsme viděli výše, odpovídá na otázku „Jak se změní **červená část funkce**, když se změní **část modrá**?“ Pokud však **červená** na **modré** části nijak nezávisí, pak se **červená** nezmění vůbec. To znamená, že tato změna je nulová a i odpovídající derivace je nulová.

Např. proměnná **y** se v závislosti na **x** nemění, tj. chová se jako konstanta a $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

Před dalším postupem doporučujeme čtenáři využít příkladů na str. 4.2 procvičení si postupů při derivování.

Nyní přistoupíme k ukázce využití parciálních derivací funkce k určení tečné roviny.

Zadání - 4.2:

Odhadněte hodnotu funkce $f(x, y)$ v bodě **A**:

$$f(x, y) = \frac{\ln(xy^3 + 4)}{x^2}, \quad \mathbf{A} = [3.1, -0.9].$$

K odhadu funkční hodnoty využijeme tečné roviny τ ke grafu funkce ve vhodně zvoleném bodě. Obecná rovnice roviny má totiž tvar

$$\tau : a x + b y + c z + d = 0,$$

kde a, b, c, d jsou reálné koeficienty. Vyjádříme-li si z této rovnice z a budeme-li na tento zápis pohlížet jako na definiční předpis funkce $z(x, y)$, pak k určení hodnoty této funkce potřebujeme pouze základní aritmetické operace. Platí totiž:

$$z = z(x, y) = \frac{-ax - by - d}{c}.$$

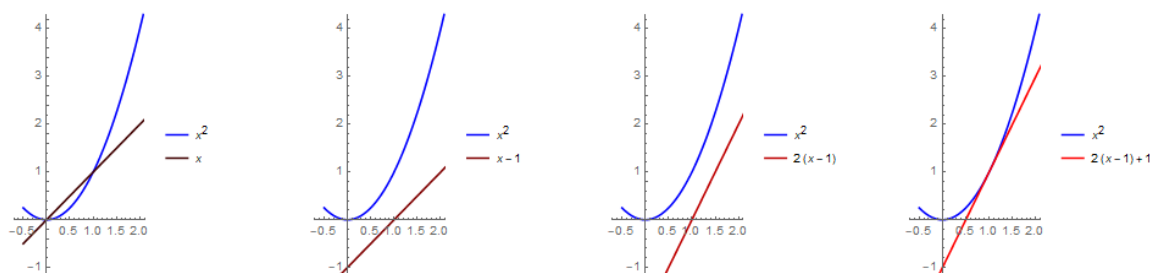
Dále platí, že tečná rovina τ a graf funkce mají společný bod dotyku a v jeho okolí můžeme funkci $f(x, y)$ pomocí tečné roviny aproximovat.

Napřed si však připomeňme si jeden ze „vzorců“ pro výpočet tečny t k funkci $g(x)$ v bodě a ,

$$t : y = g'(a)(x - a) + g(a).$$

¹Další případné algebraické úpravy jsou ponechány jako cvičení laskavému čtenáři.

Na obrázku ?? je graf $g(x) = x^2$ s tečnou v bodě $a = 1$, a to s jeho „postupným vývojem“. V první fázi máme parabolu x^2 a přímku x . V druhé člen $x - a = x - 1$ „posune“ přímku x do bodu $a = 1$, ve kterém tečnu hledáme. Hodnota $g'(a) = g'(1) = 2$ posunutou přímku nakloní podle „rychlosti paraboly v bodě $a = 1$ “. V posledním kroku připočtení funkční hodnoty $g(a) = g(1) = 1$ posunutou a nakloněnou přímku zvedne tak, aby se dotkla grafu.



Obr. 4.1: Graf $g(x) = x^2$ s tečnou v $a = 1$

Jak je vidět z poslední části obrázku 4.1 tak v okolí *bodu dotyku* grafy funkce x^2 a tečny $2x - 1$ splývají, takže lze tečny využít k odhadu funkční hodnoty. Např. $f(1.1) = 1.1^2 = 1.21$, přičemž odhad pomocí tečny dává $2 \cdot 1.1 - 1 = 1.2$. V případě funkce x^2 je použití tečny zbytečně složitým postupem, ovšem u komplikovanějších funkcí se již jejich nahrazení lineární funkcí může vyplatit.

V případě, že hledáme tečnou rovinu τ k funkci $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{T} = [T_x, T_y]$, používáme vzorec, který vypadá podobně jako vzorec použitý pro výpočet tečny.

Důležité:

Tečná rovina τ k funkci $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{T} = [T_x, T_y]$

$$\tau : z = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T})(x - T_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T})(y - T_y) + f(\mathbf{T}).$$

Zjednodušeně si lze představovat, že rovinu $z = x + y$ členy $x - T_x$ a $y - T_y$ ji upraví a „posunou pod bod dotyku“, dostaneme $z = (x - T_x) + (y - T_y)$. Násobení hodnotou parciálních derivací v bodě $\mathbf{T}$, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T})$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T})$ „posunutou“ rovinu správně nakloní. A konečně přidání funkční hodnoty $f(\mathbf{T}) = f(T_x, T_y)$ posunutou a nakloněnou rovinu „přiloží“ k grafu funkce.

Protože již známe vzorec, můžeme se vrátit k našemu úkolu. Přímé dosazení bodu $\mathbf{A} = [3.1, -0.9]$ do $f(x, y) = \frac{\ln(xy^3+4)}{x^2}$, se zcela jistě nedá zvládnout jen s pomocí sčítání, odčítání, násobení a dělení. Použití odhadu pomocí tečné roviny si s těmito algebraickými operacemi vystačí.

Zvolme si tedy vhodný bod $\mathbf{T}$, v němž tečnou rovinu spočteme. Neměl by „ležet daleko“ od bodu $\mathbf{A}$ a také by měl být snadno „dosaditelný“ do $f(x, y)$. Takovým bodem je v našem případě bod $\mathbf{T} = [3, -1]$.

Spočtěme si nejprve funkční hodnotu $f(\mathbf{T})$ a hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T})$ resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T})$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{T}) &= f(T_x, T_y) = f(3, -1) = \frac{\ln(3 \cdot (-1)^3 + 4)}{3^2} = \frac{\ln(1)}{9} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \frac{\ln(xy^3+4)}{x^2}}{\partial x} = \frac{\frac{1}{xy^3+4} y^3 x^2 - \ln(xy^3+4) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T}) &= \frac{\frac{1}{3 \cdot (-1)^3+4} (-1)^3 3^2 - \ln(3 \cdot (-1)^3 + 4) \cdot 2 \cdot 3}{(3^2)^2} = \frac{-9}{81} = -\frac{1}{9}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \frac{\ln(xy^3+4)}{x^2}}{\partial y} = \frac{\frac{1}{xy^3+4} 3xy^2 x^2 - \ln(xy^3+4) \cdot 0}{(x^2)^2} = \frac{3y^2}{x(xy^3+4)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T}) &= \frac{3 \cdot (-1)^2}{3(3 \cdot (-1)^3 + 4)} = \frac{3}{3} = 1.^2 \end{aligned}$$

Takto dostáváme rovnici roviny τ ve tvaru $z = -\frac{1}{9}(x-3) + 1(y+1) + 0 = 0$, který můžeme vynásobením -9 a drobnou úpravou převést do tvaru

$$\tau : x - 9y + 9z - 12 = 0.$$

K požadovanému odhadu funkční hodnoty však použijeme první tvar, protože do takového tvaru se bod $\mathbf{A} = [3.1, -0.9]$ bude dosazovat nejlépe. Máme tedy

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{9}(x-3) + 1(y+1) \longrightarrow z(x, y) = -\frac{1}{9}(x-3) + (y+1) \\ z(3.1, -0.9) &= -\frac{1}{9}(3.1-3) + (-0.9+1) = -\frac{1}{9}(0.1) + (0.1) = 0.1 \left(-\frac{1}{9} + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45} = 0.088888 \dots \end{aligned}$$

Dodejme ještě, že „přesná“ hodnota $f(3.1, -0.9)$ spočtená kalkulátorem je 0.0576423, chyba našeho odhadu tedy je cca 0.03.

Na obrázku 4.2 je graf funkce $f(x, y)$, a to jak tečná rovina τ „přiléhá“ k tomuto grafu v okolí bodu $\mathbf{A}$ (zvýrazněn červeně) je znázorněno na obrázku 4.3.³

V obrázku 4.3 je zakreslena také normála. Proto než příklad opustíme, zapíšeme i její rovnici. Připomeňme si, že koeficienty a, b, c z obecné rovnice roviny jsou také koeficienty normálového vektoru $\mathbf{n}$ dané roviny, tj. $\mathbf{n} = [a, b, c]$.

V případě, že jde o tečnou rovinu k funkci $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{T} = [T_x, T_y]$, lze normálový vektor psát jako

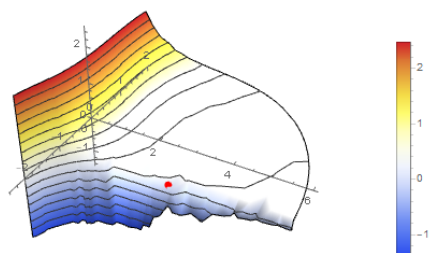
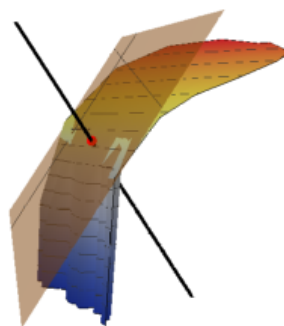
$$\mathbf{n} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T}), -1 \right],$$

což si lze snadno odvodit i ze zde uvedeného vzorce tečné roviny.⁴

²Vynechané algebraické úpravy jsou ponechány laskavému čtenáři jako cvičení.

³Oba grafy jsou odlišně natočeny

⁴Případně naopak ze znalosti normálového vektoru lze snadno dojít k obecné rovnici roviny.

Obr. 4.2: Graf $f(x, y)$ Obr. 4.3: Graf $f(x, y)$, tečná rovina, normála

Zapišme rovnici normály n ke grafu funkce $f(x, y) = \frac{\ln(xy^3+4)}{x^2}$ v bodě $\mathbf{T} = [3, -1]$. K tomu samozřejmě využijeme normálového vektoru, jehož složky známe z výpočtu tečné roviny τ , tj.

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{T}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{T}), -1 \right] = \left[-\frac{1}{9}, 1, -1 \right].$$

Kromě vektoru však k zápisu přímky potřebujeme také bod, kterým prochází. Tím je samozřejmě bod dotyku tečné roviny a grafu $f(x, y)$, což je v tomto případě bod $\mathbf{T} = [T_x, T_y, f(T_x, T_y)] = [3, -1, 0]$.

Rovnice normály je $n : \mathbf{X} = \mathbf{T} + t \cdot \mathbf{n}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$n : \mathbf{X} = [T_x, T_y, T_z] + t \cdot [n_x, n_y, n_z], \quad n : [x, y, z] = [3, -1, 0] + t \cdot \left[-\frac{1}{9}, 1, -1 \right], \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} x(t) &= T_x + t \cdot n_1, & x(t) &= 3 - \frac{1}{9}t, \\ y(t) &= T_y + t \cdot n_2, & y(t) &= -1 + 1t, \\ z(t) &= T_z + t \cdot n_3, & z(t) &= -1t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

První zápis je rovnice vektorová, další tři pak spolu tvoří parametrickou rovnici přímky (v tomto případě normály). Obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje.

Samozřejmě lze místo vektoru $[-\frac{1}{9}, 1, -1]$ použít např. vektor $-9\mathbf{n} = [1, -9, 9]$, díky jehož tvaru se zápis rovnic normály zpřehlední:

$$x(t) = 3 + t, \quad y(t) = -1 - 9t, \quad z(t) = 9t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Důležité:

Totálním diferenciálem v bodě $\mathbf{A}$ nazýváme přírůstek tečné roviny při přechodu z bodu $\mathbf{A} = [x_0, y_0]$ do bodu $\mathbf{X} = [x, y] = [x_0 + dx, y_0 + dy]$. Spočteme jej jako:

$$df(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A}) dy = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A}) (y - y_0).$$

Funkční hodnotu $f(x, y) = \frac{\ln(xy^3+4)}{x^2}$ v bodě $\mathbf{X} = [3.1, -0.9]^5$, tedy můžeme odhadnout a zapsat i pomocí totálního diferenciálu. Bod $\mathbf{A} = [3, -1]$, $dx = 3.1 - 3 = 0.1$, $dy = -0.9 - (-1) = 0.1$ a odhad spočteme takto

$$f(\mathbf{X}) \approx f(\mathbf{A}) + df(\mathbf{A}) = 0 - \frac{1}{9} dx + 1 dy = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}.$$

Výsledek, který jsme obdrželi je samozřejmě shodný s odhadem pomocí tečné roviny. Pokud chceme odhad zpřesnit, můžeme použít diferenciál vyššího řádu k vytvoření *Taylorova polynomu*. Naznačme zde postup pro diferenciál resp. Taylorův polynom druhého řádu resp. stupně.

Důležité:

Totální diferenciál druhého řádu pro funkci $f(x, y)$ definujeme jako

$$d^2f = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2.$$

Pomocí diferenciálů zapišme vzorec pro tečnou rovinu a Taylorův polynom druhého stupně. Přitom si všimněme, že tečná rovina τ je vlastně Taylorovým polynomem prvního stupně a můžeme ji označit $\tau = t_1$.

Důležité:

Tečnou rovinu t_1 a Taylorův polynom druhého stupně t_2 v bodě $\mathbf{A}$ spočteme jako

$$\begin{aligned} t_1 : z &= f(\mathbf{A}) + df(\mathbf{A}), \\ t_2 : z &= f(\mathbf{A}) + df(\mathbf{A}) + \frac{1}{2!} d^2f(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Nové pojmy si opět budeme ilustrovat řešeným příkladem

Zadání - 4.3:

V bodě $\mathbf{A} = [3, 1]$ určete diferenciál 1. a 2. řádu k funkci

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x - 2y).$$

Sestavte rovnice tečné roviny a Taylorova polynomu 2. stupně v tomto bodě. Odhadněte hodnotu $f(3.1, 0.9)$.

Nejprve je potřeba spočítat všechny parciální derivace prvního

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{arctg}(x-2y)}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x-2y)^2} = (1 + (x-2y)^2)^{-1}, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \operatorname{arctg}(x-2y)}{\partial y} = \frac{-2}{1 + (x-2y)^2} = -2(1 + (x-2y)^2)^{-1}, \end{aligned}$$

⁵Pro větší přehlednost je zde použito značení jako v definici

a druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(1 + (x - 2y)^2\right)^{-1}}{\partial x} = -\left(1 + (x - 2y)^2\right)^{-2} (2(x - 2y)) = \frac{-2(x - 2y)}{\left(1 + (x - 2y)^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(1 + (x - 2y)^2\right)^{-1}}{\partial y} = -\left(1 + (x - 2y)^2\right)^{-2} (2(x - 2y) \cdot (-2)) = \frac{4(x - 2y)}{\left(1 + (x - 2y)^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \left(-2 \left(1 + (x - 2y)^2\right)^{-1}\right)}{\partial x} = -2 \left(-\left(1 + (x - 2y)^2\right)^{-2} (2(x - 2y))\right) = \frac{4(x - 2y)}{\left(1 + (x - 2y)^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{-8(x - 2y)}{\left(1 + (x - 2y)^2\right)^2}.$$

Všimněme si, že obě smíšené derivace jsou si rovny. Nejde o náhodu, platí totiž:

Důležité:

Věta (Schwarzova): Jsou-li obě smíšené parciální derivace spojité funkce v bodě $\mathbf{A}$, pak se v tomto bodě rovnají:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Obdobné tvrzení platí i pro derivace vyšších řádů a pro funkce více proměnných. To znamená, že v případě spojitých parciálních derivací *nezáleží na pořadí derivování*.

Po této spíše zdlouhavé než těžké části si připomeneme vzorce pro výpočet diferenciálu 1. a 2. řádu k $f(x, y)$, do kterých dosadíme vypočtené a provedeme „pár úprav“⁷ ke zpřehlednění výsledku. Nejprve diferenciál prvního řádu

$$\begin{aligned} df(\mathbf{A}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A}) dy = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A}) (y - y_0) \\ &= \frac{1}{2} dx - 1 dy = \frac{1}{2}(x - 3) - 1(y - 1) = \frac{x}{2} - y - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dále diferenciál druhého řádu

$$d^2f = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^2f = \frac{-2(x - 2y)}{\left(1 + (x - 2y)^2\right)^2} dx^2 + \frac{8(x - 2y)}{\left(1 + (x - 2y)^2\right)^2} dx dy + \frac{-8(x - 2y)}{\left(1 + (x - 2y)^2\right)^2} dy^2$$

$$d^2f = \frac{-2(x - 2y)}{\left(1 + (x - 2y)^2\right)^2} (dx^2 - 4 dx dy + 4 dy^2)$$

⁶Výpočet $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ je ponechán laskavému čtenáři jako cvičení

⁷ponechaných laskavému čtenáři jako cvičení

Nyní dosadíme bod $\mathbf{A}$, tj. dosadit $x = 3$ resp. $y = 1$ a dále $dx = (x - 3)$ resp. $dy = (y - 1)$, jako u diferenciálu první řádu. Tak dostaneme

$$\begin{aligned} d^2f &= \frac{-2(x-2y)}{(1+(x-2y)^2)^2} (dx^2 - 4dx dy + 4dy^2) \\ d^2f(\mathbf{A}) &= \frac{-2(3-2 \cdot 1)}{(1+(3-2 \cdot 1)^2)^2} ((x-3)^2 - 4(x-3)(y-1) + 4(y-1)^2) \\ d^2f(\mathbf{A}) &= -\frac{1}{2} ((x^2 - 6x + 9) - 4(xy - x - 3y + 3) + 4(y^2 - 2y + 1)) \\ d^2f(\mathbf{A}) &= -\frac{1}{2} (x^2 - 4xy - 2x + 4y^2 + 4y + 1) \\ d^2f(\mathbf{A}) &= -\frac{x^2}{2} + 2xy + x - 2y^2 - 2y - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

K sestavení rovnic tečné roviny t_1 a Taylorova polynomu t_2 potřebujeme znát funkční hodnotu v bodě $\mathbf{A}$, tj. $\arctg(3 - 2 \cdot 1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. A zbývá jen dosadit do vzorců ze strany 29 a máme hotovo.

$$\begin{aligned} t : z &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-3) - (y-1) = \frac{x}{2} - y - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}, \\ t_2 : z &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-3) - (y-1) - \frac{1}{4}((x-3)^2 - 4(x-3)(y-1) + 4(y-1)^2) = \\ &= -\frac{x^2}{4} + xy - y^2 + x - 2y - \frac{3}{4} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

K odhadnutí funkční hodnoty stačí dosadit $x = 3.1$ a $y = 0.9$. K tomu je vhodnější využít neroznásobené tvary, protože $x - 3 = 3.1 - 3 = \frac{1}{10}$ a $y - 1 = 0.9 - 1 = -\frac{1}{10}$ jsou čísla, které se násobí a umocňují snadněji než 3.1 a 0.9.

Odhad pomocí tečné roviny je $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{20} = 0.9354$. Pomocí Taylorova polynomu dostáváme zpřesnění $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{20} - \frac{9}{400} = 0.9129$. A konečně funkční hodnota spočtená kalkulatorem je 0.9151.⁸

Závěrem můžeme konstatovat, že zatímco odhad tečnou se „dopustil“ chyby cca 0.02, odhad Taylorovým polynomem se „zmýlil“ jen o cca 0.002. Spočtením Taylorova polynomu vyššího stupně bychom dosáhli vyšší přesnosti. Ostatně, zjednodušeně lze tvrdit, že kalkulátor či počítač nepracuje s ničím jiným než s Taylorovým polynomem.

⁸Všechny hodnoty jsou zaokrouhleny na čtyři desetinná místa.

4.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:



Spočtěte zadané derivace funkce $f(x, y)$.

$$(4.1) \quad f(x, y, z) = z(x + 2y)^4, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ?, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = ?.$$

$$(4.2) \quad f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^4, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ?, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = ?.$$

$$(4.3) \quad f(x, y, z) = x^5 + x^4y + x^3y^2z - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ?, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = ?.$$

$$(4.4) \quad f(x, y, z) = (x^5 + y^2z - 1)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = ?, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ?.$$

$$(4.5) \quad f(x, y, z) = \ln(x + y^2 - z^3), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = ?, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?.$$

$$(4.6) \quad f(x, y, z) = ye^{x-z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ?, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = ?.$$

$$(4.7) \quad f(x, y, z) = xz(x^2 + 3y)^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ?, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = ?.$$

$$(4.8) \quad f(x, y, z) = \frac{(x-y)(x-z)}{y+z}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = ?, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ?.$$

Úloha:



K funkci $f(x, y)$ určete tečnou rovinu τ a normálu n v bodě A .

$$(4.9) \quad f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x}{y}}, \quad A = [-3, 1, ?].$$

$$(4.13) \quad f(x, y) = \ln(x + y), \quad A = [1, 2, ?].$$

$$(4.10) \quad f(x, y) = \frac{1}{2y^2 - x}, \quad A = [1, 1, ?].$$

$$(4.14) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - y^2}}, \quad A = [5, 2, ?].$$

$$(4.11) \quad f(x, y) = x \ln y - y \ln x, \quad A = [1, 1, ?].$$

$$(4.15) \quad f(x, y) = y \ln(x - y), \quad A = [2, 1, ?].$$

$$(4.12) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = [4, -3, ?].$$

$$(4.16) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y} - xy, \quad A = [2, 1, ?].$$

Úloha:



K funkci $f(x, y)$ určete diferenciál 2. řádu, a to i v bodě A pokud je zadán.

(4.17) $f(x, y) = \cos(x - y),$

(4.21) $f(x, y) = \frac{x}{2y} - \frac{y}{2x}, \mathbf{A} = [1, -1],$

(4.18) $f(x, y) = (x - 2y)^3,$

(4.22) $f(x, y) = \ln(x^2 - y),$

(4.19) $f(x, y) = (3x - 2y)^{-1},$

(4.23) $f(x, y) = \cos(3x - 2y), \mathbf{A} = [2, 3],$

(4.20) $f(x, y) = x^2 \ln\left(\frac{1}{y}\right), \mathbf{A} = [-1, 1],$

(4.24) $f(x, y) = \sqrt{x + 2y}, \mathbf{A} = [-1, 1],$

Výsledek úlohy:Spočtete zadané derivace funkce $f(x, y)$.

(4.1) $\frac{\partial f}{\partial z} = (x + 2y)^4, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$

(4.2) $\frac{\partial f}{\partial z} = 12(x + 2y + 3z)^3, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 72(x + 2y + 3z)^2,$

(4.3) $\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 + 2x^3yz, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2x^3y,$

(4.4) $\frac{\partial f}{\partial x} = 10x^4(x^5 + y^2z - 1), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10x^3(9x^5 + 4y^2z - 4),$

(4.5) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2 - z^3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x + y^2 - z^3)^2},$

(4.6) $\frac{\partial f}{\partial z} = -2yze^{x-z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -2yze^{x-z^2},$

(4.7) $\frac{\partial f}{\partial y} = 12xz(x^2 + 3y)^3, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 12x(x^2 + 3y)^3,$

(4.8) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x - y - z}{y + z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{y + z},$

Výsledek úlohy:K funkci $f(x, y)$ určete tečnou rovinu τ a normálu n v bodě $\mathbf{A}$.

(4.9) $n : x(t) = -t - 3, y(t) = 3t + 1, z(t) = 2 - 4t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -x + 3y - 4z + 2 = 0.$

(4.10) $n : x(t) = t + 1, y(t) = -4t + 1, z(t) = -t + 1, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - 4y - z + 4 = 0.$

(4.11) $n : x(t) = -t + 1, y(t) = t + 1, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : -x + y - z = 0.$

(4.12) $n : x(t) = 4 + 4t, y(t) = -3 - 3t, z(t) = 5 - 5t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 4x - 3y - 5z = 0.$

(4.13) $n : x(t) = 1 + t, y(t) = 2 + t, z(t) = \ln 3 - 3t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x + y - 3z + 3(\ln 3 - 1) = 0.$

(4.14) $n : x(t) = -t + 5, y(t) = 4t + 2, z(t) = -2t + 1, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - 4y + 2z + 1 = 0.$

(4.15) $n : x(t) = 2 + t, y(t) = 1 - t, z(t) = -t, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : x - y - z - 1 = 0.$

(4.16) $n : x(t) = 3t + 2, y(t) = -6t + 1, z(t) = -t + 2, t \in \mathbb{R}, \quad \tau : 3x - 6y - z + 2 = 0.$

Výsledek úlohy:



K funkci $f(x, y)$ určete diferenciál 2. řádu, a to i v bodě $\mathbf{A}$ pokud je zadán.

$$(4.17) \quad d^2f = -\cos(x - y) (dx^2 - 2 dx dy + dy^2).$$

$$(4.18) \quad d^2f = 6(x - 2y) (dx^2 - 4 dx dy + 4 dy^2).$$

$$(4.19) \quad d^2f = \frac{18 dx^2 - 24 dx dy + 8 dy^2}{(3x - 2y)^3}.$$

$$(4.20) \quad d^2f(\mathbf{A}) = y^2 + 4xy + 2y - 4x - 3.$$

$$(4.21) \quad d^2f(\mathbf{A}) = x^2 - 2x - y^2 - 2y.$$

$$(4.22) \quad d^2f = \frac{-2(x^2 + y) dx^2 + 4x dx dy - dy^2}{(x^2 - y)^2}.$$

$$(4.23) \quad d^2f(\mathbf{A}) = -9x^2 + 12xy - 4y^2.$$

$$(4.24) \quad d^2f(\mathbf{A}) = -\frac{1}{4} (x^2 + 4xy - 2x + 4y^2 + 1).$$

Kapitola 5

Gradient

V předchozích kapitolách jsme se často vraceli k vlastnostem funkcí jedné proměnné. Jednou z těchto základních je monotónnost, tj. rozhodnutí zda je funkce (ne)rostoucí či (ne)klesající. Jde o poměrně jednoduchý koncept, funkce je rostoucí pokud se se zvětšujícím se argumentu zvyšuje také funkční hodnota.

Cíl:



Cílem této kapitoly je uvědomit si rozdíl mezi funkcí jedné a funkcí více proměnných. K ilustraci využijeme jednoduchý koncept monotónnosti funkce a jeho změnu při přechodu od jedné k více proměnným. Přitom si dále upevníme znalosti diferenciální počtu funkce dvou proměnných a také základní operace s vektory.

Předpoklady:



Jak bylo naznačeno, z teorie funkce jedné proměnné je dobré si připomenout vztah mezi monotónností funkce a její derivací, rozdíly mezi klesající a neklesající funkcí, apod.. Dále využijeme skalární součin dvou vektorů, výpočet velikosti vektoru a jeho normování.

Čas:



Prostudování kapitoly zabere 3 hodiny.

Budete umět:



- Spočítat *gradient* funkce,
- Určit směr nejvyššího růstu funkce,
- Spočítat směrovou derivaci funkce,
- Rozhodnout, zda je funkce v daném směru rostoucí.

Začneme tedy připomínkou teorie funkce jedné proměnné:

Důležité:

Funkce $f(x)$ je *rostoucí*, právě když pro každé $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak je také $f(x_1) < f(x_2)$.

Důležité:

Nechť pro $\forall x \in (a, b)$ platí $f'(x) > 0$ resp. $f'(x) < 0$, pak je funkce $f(x)$ v (a, b) *rostoucí* resp. *klesající*.

Cílem této kapitoly je převést tyto znalosti do teorie funkce více proměnných.

Hlavním problémem, na který zde narazíme, je část „ $x_1 < x_2$ “. V případě jedné proměnné je argumentem $x \in \mathbb{R}$ a definiční obor lze zakreslit na číselnou osu. Pohyb po této ose „zleva do prava“ znamená zvětšování argumentu. V závislosti na tomto zvětšování, pak sledujeme, jak se mění funkční hodnota.

Pomůžeme-li si v případě funkce dvou proměnných „mapovou“ analogií, můžeme se pohybovat nejen na východ, tj. „zleva do prava“, ale také na sever, a také na severoseverozápad, a také...

Z této úvahy je již patrné, že chceme-li odpověď na otázku, zda je funkce více proměnných *rostoucí* či *klesající*, musíme znát směr změny argumentu. Nebude tedy stačit „obyčejná“ derivace, musíme určit *směrovou derivaci*. A k určení směrové derivace budeme potřebovat *gradient* funkce, což je směr jejího nejvyššího růstu.

Důležité:

Gradientem funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ resp. *gradientem v bodě* $\mathbf{A}$ je vektor

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right], \text{ resp. } \nabla f(\mathbf{A}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{A}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{A}) \right].$$

Důležité:

Derivaci funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *ve směru* $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]$ s velikostí $\|\mathbf{s}\| = 1$ v bodě $\mathbf{A}$ definujeme jako

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{A}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{A} + \mathbf{s}t) - f(\mathbf{A})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A})s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{A})s_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{A})s_n.$$

Postup při výpočtu a další vztahy mezi *gradientem* a *směrovou derivací* si ukážeme v řešených příkladech, v nichž se omezíme na funkci dvou resp. tří proměnných.

Zadání - 5.1:

Určete, zda funkce $f(x, y) = \ln(1 - x^2 + y^2)$ v bodě $\mathbf{A} = [-1, 1]$ ve směru vektorů $\mathbf{u}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{u}_2 = [0, -1]$, $\mathbf{u}_3 = [1, -1]$ a $\mathbf{u}_4 = [1, 2]$ roste či klesá a určete rychlost změny.

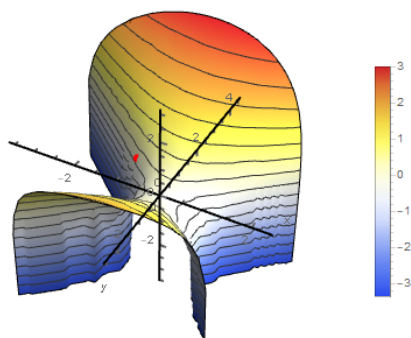
Nejjednodušší, intuitivní, metodou, jak položené otázky zodpovědět je nakreslit si obrázek. Tedy graf funkce. Funkce $f(x, y)$ je definována pro všechny body $\mathbb{R}^2$, které splňují podmínku

$$1 - x^2 + y^2 > 0, \text{ tj. } 1 > x^2 - y^2,$$

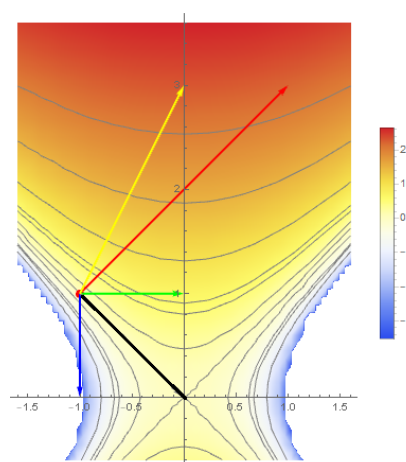
což jsou body „uvnitř“ hyperboly $x^2 - y^2 = 1$.

Funkční hodnota v bodě $\mathbf{A}$ je $f(1, -1) = \ln(1) = 0$. Vrstevnici, na níž bod $\mathbf{A}$ leží, získáme vyřešením rovnice $x^2 - y^2 = 0$, tj. $x^2 = y^2$, s řešeními $x = y$ a $x = -y$. Osy prvního a třetího kvadrantu, tak určují „nulovou“ hladinu funkce.

Další vrstevnice bychom získali z rovnic $x^2 - y^2 = k$, pro $k < 1$, což jsou rovnice hyperbol, viz kapitola 2 str. 9. S touto „geometrickou“ představou si již necháme celou plochu, která je grafem funkce $f(x, y)$, vykreslit, viz obr. 5.1



Obr. 5.1: Graf $\ln(1 - x^2 + y^2)$



Obr. 5.2: Graf $\ln(1 - x^2 + y^2)$,
vrstevnice a směry

Máme-li k dispozici graf 5.1 spolu s vrstevnicovým grafem 5.2, není problémem zjistit, ve kterém ze směrů bude funkční hodnota klesat a ve kterém růst. Na obou grafech červená značí kladné hodnoty a modrá hodnoty záporné.

Především však je názorně vidět, že v **modrém směru** $\mathbf{u}_2$ „jdeme z bodu $\mathbf{A}$ do modrých-záporných hodnot“, funkce tedy v tomto směru klesá. Stejně tak si lze všimnout, že černý vektor $\mathbf{u}_3$ „leží“ na vrstevnici a pohybujeme-li se po vrstevnici, zůstáváme na stejné hladině, funkční hodnoty nerostou, neklesají. **Zelený směr** $\mathbf{u}_1$ i **žlutý směr** $\mathbf{u}_4$ míří k červeným hodnotám a v těchto směrech funkce roste. Poslední **červený vektor** také ukazuje k červeným hodnotám, je kolmý k vrstevnici procházející bodem $\mathbf{A}$ a jde o vektor *gradientu* funkce $f(x, y)$, tj. ∇f .

Více a především přesnější informace však z grafu nezískáme. Navíc v případě složitějších funkcí grafem nebudeme moci pomoci vůbec. Proto musíme k rozpoznání růstu či klesání funkce v daném směru a jejich přesnému popisu použít výpočty, resp. výpočty *gradientu a derivace ve směru*.

Začneme výpočtem gradientu,

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial \ln(1 - x^2 + y^2)}{\partial x}, \frac{\partial \ln(1 - x^2 + y^2)}{\partial y} \right] = \left[\frac{-2x}{1 - x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 + y^2} \right].$$

Protože vyšetřujeme funkci $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{A}$, spočteme si dále gradient v tomto konkrétním bodě. Nejde o nic jiného než o dosazení souřadnic bodu do předchozího vztahu

$$\nabla f(\mathbf{A}) = \left[\frac{-2 \cdot (-1)}{1 - (-1)^2 + 1^2}, \frac{2 \cdot 1}{1 - (-1)^2 + 1^2} \right] = [2, 2].$$

Máme-li vypočtený gradient, známe směr největšího růstu funkce¹. Určit můžeme také velikost největšího růstu, což je velikost gradientu, tj. pro bod $\mathbf{A}$ máme $\|\nabla f\| = \sqrt{8}$. A konečně známe také směr největšího klesání, to je směr $-\nabla f$.

Teď již zbývá jen určit chování funkce v zadaných směrech $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ a $\mathbf{u}_4$, k tomu použijeme jejich skalární součin s gradientem.²

Poznámka:



S pomocí poznámky na straně 3 můžeme (s nadsázkou) říci, že vynásobíme-li skalárně vektor $\nabla f(\mathbf{A})$ s vektorem požadovaného směru zjistíme, „kolik z největšího růstu se do něj promítlo“ a zda v tomto směru funkce klesá či stoupá.

Pro zadané směry máme

$$\nabla f(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_1 = [2, 2] \cdot [1, 0] = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2 > 0,$$

$$\nabla f(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_2 = [2, 2] \cdot [0, -1] = 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2 < 0,$$

$$\nabla f(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_3 = [2, 2] \cdot [1, -1] = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0,$$

$$\nabla f(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_4 = [2, 2] \cdot [1, 2] = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6 > 0.$$

Z těchto výsledků lze vyčíst, že ve směru vektorů $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_4$ funkce roste, ve směru $\mathbf{u}_2$ klesá a ve směru $\mathbf{u}_3$ je konstantní. Což je ve shodě s úvahou, kterou jsme provedli s pomocí grafu 5.2.

Chceme-li však dále stoupání či klesání porovnávat a lépe popisovat, musíme ve výpočtu provést na jednu drobnou změnu. Gradient musíme skalárně vynásobit vektorem, který má „stejný směr“ jako vektor $\mathbf{u}$, ale má jednotkovou velikost. Takovým vektorem je vektor *normovaný* $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$. Teprve pak jako výsledek tohoto součinu obdržíme směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{A}$ a ve směru $\mathbf{u}$, $\frac{du}{ds}(\mathbf{A})$, jak byla definována na straně 5.

Protože vektory $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$ mají jednotkovou velikost a ve směru vektoru $\mathbf{u}_3$ je funkce konstantní, provedeme výpočet pouze pro $\mathbf{u}_4$.

¹směr, v němž funkce „graduje“

²Pokud se pozorně podíváme na definici gradientu a směrové derivace, viz str. 36, skalární součin v ní uvidíme.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}_4}{ds}(\mathbf{A}) &= \nabla f(\mathbf{A}) \cdot \frac{\mathbf{u}_4}{\|\mathbf{u}_4\|} = [2, 2] \cdot \frac{[1, 2]}{\sqrt{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_4}} = [2, 2] \cdot \frac{[1, 2]}{\sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2}} = \\ &= [2, 2] \cdot \frac{[1, 2]}{\sqrt{5}} = [2, 2] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right] = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Z výpočtu je také patrné, že výsledek $\nabla f(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_4$ stačilo vydělit velikostí vektoru $\mathbf{u}_4$.

U funkce dvou proměnných jsme si mohli pomoci představou reliéfní mapy či zakreslením vrstevnic do roviny. Pokud však budeme vyšetřovat funkci více proměnných, budeme odkázáni pouze na výpočty. Viz následující příklad funkce tří proměnných.

Úloha:



Vypočítejte gradient $u(x, y, z)$ a směrovou derivaci v daném bodě $\mathbf{A}$ ve směru $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$.

$$u(x, y, z) = z\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}, \quad \mathbf{A} = [2, -4, 3], \quad \mathbf{b} = [1, 2, 2], \quad \mathbf{c} = [2, 4, 4].$$

Funkce $u(x, y, z)$ je definována pro všechny body $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$. Funkční hodnota v bodě $\mathbf{A}$ je $u(2, -4, 3) = 3$. A s pomocí gradientu resp. směrové derivace i zde můžeme zjistit, zda funkce v daném směru roste nebo klesá. Protože však grafem funkce tří proměnných je čtyřrozměrná plocha, musíme ožet grafickou představu a věnovat se pouze výpočtům. Nicméně výpočty jsou „skoro stejné“ jako v předchozím příkladě.

Nejprve tedy spočteme gradient resp. gradient v bodě $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\nabla u &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \left[\frac{\partial z\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}}{\partial x}, \frac{\partial z\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}}{\partial y}, \frac{\partial z\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}}{\partial z} \right] = \\ &= \left[\frac{2xz(x^2 + y)}{\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}}, \frac{z(x^2 + y)}{\sqrt{1 + (x^2 + y)^2}}, \sqrt{1 + (x^2 + y)^2} \right] \Rightarrow \nabla u(\mathbf{A}) = [0, 0, 1].\end{aligned}$$

Dále si spočteme velikost vektorů $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a budeme je normovat, tj. získáme z nich vektor stejného směru s jednotkovou velikostí

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}| &= \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3, \Rightarrow \mathbf{b}_n = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right], \\ |\mathbf{c}| &= \sqrt{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6, \Rightarrow \mathbf{c}_n = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right].\end{aligned}$$

Teď již výpočty dokončíme, a to jedním skalárním součinem

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}(\mathbf{A}) = \nabla u(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}_n = [0, 0, 1] \cdot \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] = \frac{2}{3}.$$

Je dopočítáno a můžeme konstatovat, že funkce $u(x, y, z)$ je v bodě $\mathbf{A}$ a ve směru $\mathbf{b}$ rostoucí.

Pro vektor $\mathbf{c}$ je výsledek stejný, neboť $\mathbf{b}_n = \mathbf{c}_n$. Pokud bychom však vektory nenormalizovali, dostali bychom $\nabla u(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} = 2$ a $\nabla u(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c} = 4$. Takový výsledek by znamenal, že ve směru $\mathbf{c}$ roste funkce dvakrát rychleji než ve směru $\mathbf{b}$. To však nemůže být pravda, neboť směry jsou stejné.

Úloha:

Vypočtěte gradient funkce $u(x, y, z)$ a směrovou derivaci v daném bodě $\mathbf{A}$ a směru $\mathbf{b}$.

$$(5.1) \quad u(x, y, z) = x^3 - xyz - y^2 + \sqrt{z}, \quad \mathbf{A} = \left[0, 4, \frac{1}{4}\right], \quad \mathbf{b} = [1, 2, 3].$$

$$(5.2) \quad u(x, y, z) = x^3 y^2 + x^2 z^2 - y^3 z, \quad \mathbf{A} = \left[\frac{1}{2}, 0, 4\right], \quad \mathbf{b} = [4, -3, 0].$$

$$(5.3) \quad u(x, y, z) = z^2 \cos(x + 2y), \quad \mathbf{A} = \left[\pi, \frac{\pi}{2}, 2\right], \quad \mathbf{b} = [2, -2, 1].$$

$$(5.4) \quad u(x, y, z) = \ln\left(\frac{3x + 2y}{z}\right), \quad \mathbf{A} = [1, -1, 1], \quad \mathbf{b} = [2, -1, 2].$$

$$(5.5) \quad u(x, y, z) = x^2 - 2xy + \frac{z^2}{y^3}, \quad \mathbf{A} = [1, -1, 1], \quad \mathbf{b} = [2, -1, 2].$$

$$(5.6) \quad u(x, y, z) = x^2 + xy + 3x + 2y^2 - 2y + 3z^2 - 6z, \quad \mathbf{A} = [1, 1, 1], \quad \mathbf{b} = [0, 1, \sqrt{2}].$$

$$(5.7) \quad u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4}, \quad \mathbf{A} = [2, 2, 2], \quad \mathbf{b} = [1, 1, 1].$$

$$(5.8) \quad u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz, \quad \mathbf{A} = [1, 1, 3], \quad \mathbf{b} = [-1, 2, -1].$$

$$(5.9) \quad u(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} + \frac{4}{xyz}, \quad \mathbf{A} = [-1, -1, -1], \quad \mathbf{b} = [-5, -6, -7].$$

$$(5.10) \quad u(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z}, \quad \mathbf{A} = [1, 1, 1], \quad \mathbf{b} = [3, -2, 4].$$

Výsledek úlohy:

Vypočtěte gradient funkce $u(x, y, z)$ a směrovou derivaci v daném bodě $\mathbf{A}$ a směru $\mathbf{b}$.

$$(5.1) \quad \nabla u = \left[3x^2 - yz, -xz - 2y, \frac{1}{2\sqrt{z}} - xy\right], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = -\sqrt{14}.$$

$$(5.2) \quad \nabla u = [3x^2 y^2 + 2xz^2, 2x^3 y - 3y^2 z, 2x^2 z - y^3], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = \frac{64}{5}.$$

$$(5.3) \quad \nabla u = [-z^2 \sin(x + 2y), -2z^2 \sin(x + 2y), 2z \cos(x + 2y)], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = \frac{4}{3}.$$

$$(5.4) \quad \nabla u = \left[\frac{3}{3x+2y}, \frac{2}{3x+2y}, -\frac{1}{z} \right], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = \frac{2}{3}.$$

$$(5.5) \quad \nabla u = \left[2x - 2y, -2x - \frac{3z^2}{y^4}, \frac{2z}{y^3} \right], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = 3.$$

$$(5.6) \quad \nabla u = [2x + y + 3, x + 4y - 2, 6z - 6], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = \sqrt{3}.$$

$$(5.7) \quad \nabla u = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4}} \right], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(5.8) \quad \nabla u = [2x - 3yz, 2y - 3xz, 2z - 3xy], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = -\frac{5}{3}\sqrt{6}.$$

$$(5.9) \quad \nabla u = \left[-\frac{4}{x^2yz} - \frac{1}{x^2}, -\frac{4}{xy^2z} - \frac{2}{y^2}, -\frac{4}{xyz^2} - \frac{3}{z^2} \right], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = \sqrt{110}.$$

$$(5.10) \quad \nabla u = \left[\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right], \quad \frac{du}{ds}(\mathbf{A}) = 0.$$

Kapitola 6

Extrémy

Cíl:



Náplní této kapitoly je převedení úvah a postupů vedoucích k nalezení lokálních extrémů funkce jedné proměnné na případ funkce dvou proměnných.

Čas:



Na kapitolu postačí 2 hodiny.

Předpoklady:



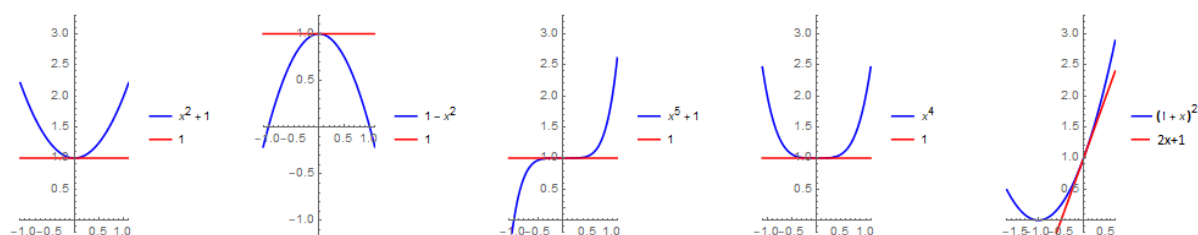
Umět nalézt lokální extrémy funkce jedné proměnné. Rozpoznat funkci konvexní a konkávní. Spočítat parciální derivace, řešit soustavy rovnic a počítat determinant.

Budete umět:



- Nalézt lokální extrémy funkce dvou proměnných

Prohlédněme si grafy na obrázku 6.1. Není složité zjistit, že pro první čtyři z nich, tj. pro funkce $x^2 + 1$, $1 - x^2$, $1 + x^5$ a $1 + x^4$, je jejich tečnou v bodě $a = 0$ je přímka $y = 1$. Tečnou páté funkce $(1 + x)^2$ v tomto bodě je přímka $2x + 1$.



Obr. 6.1: Extrémy funkce jedné proměnné

Další pozorování začneme od konce, od funkce $(1+x)^2$, která se takto od ostatních liší.

Derivace funkce $(1+x)^2$ v bodě $a=0$ se rovná 2 a její tečna má tvar $y=2x+1$. Dle grafu, dle tečny a v neposlední řadě dle hodnoty derivace vidíme, že funkce je rostoucí. Máme tak jistotu, že bude-li se argument zvětšovat, zvětší i funkční hodnota. A to bez ohledu na to, zda uvažujeme x větší či menší než 0.¹ Lze tedy učinit závěr, že v bodě 0 tedy tato funkce extrém mít nemůže.

Pro funkce x^2+1 , $1-x^2$, $1+x^5$ a $1+x^4$ je jejich první derivace v bodě $a=0$ je nulová a možnost existence extrému v tomto bodě se nám otevírá. K rozpoznání, zda v bodě extrém je, poslouží druhá derivace. V případě x^2+1 je kladná, funkce je *konvexní* a má v bodě $a=0$ minimum. Pro $1-x^2$ je druhá derivace záporná, funkce je *konkávní* a v $a=0$ nabývá maxima. Pro funkce $1+x^5$ resp. $1+x^4$ je druhá derivace nulová a funkce v $a=0$ extrém nemá resp. má, ale dle tohoto kritéria o tom nelze rozhodnout.

Důležité:

Předpokládejme, že $f'(x) = 0$ a $f''(x) < 0$, resp. $f''(x) > 0$. Pak má funkce $f(x)$ v bodě ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum.

Jak ukazuje tento řešený příklad, situace v případě funkce dvou proměnných je obdobná. Nejprve je třeba spočítat všechny první parciální derivace. Zjistit, kdy se rovnají nule. A nakonec v těchto *podezřelých* bodech vyšetřit druhé derivace.

6.1 Řešený příklad

Zadání - 6.1:

Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = y^3 + y^2 - 6xy + 9x^2 - 3x^3.$$

V zásadních bodech budeme opravdu kopírovat postup hledání lokálních extrémů funkce jedné proměnné. Začneme tím, že spočteme první parciální derivace funkce $f(x, y)$, ty se rovnají

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -9x^2 + 18x - 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 3y^2 + 2y.$$

Dále hledáme body v nichž jsou obě tyto derivace rovny nule. Protože máme funkci dvou proměnných a tedy i dvě první parciální derivace, řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} -9x^2 + 18x - 6y &= 0 & \Rightarrow & & -3x^2 + 6x - 2y &= 0 & \Rightarrow & & 6x - 2y &= 3x^2 \\ -6x + 3y^2 + 2y &= 0 & \Rightarrow & & -6x + 3y^2 + 2y &= 0 & \Rightarrow & & 3y^2 &= 6x - 2y \end{aligned}$$

¹ale zároveň větší než -1 , což není problém, protože „jako obvykle“ vyšetřujeme pouze okolí bodu dotyku

Z posledního tvaru soustavy vidíme, že musí platit $x^2 = y^2$. To nastane, když bude $x = y$ nebo $x = -y$. Dosadíme do první z rovnic nejprve $x = y$

$$-9x^2 + 18x - 6y = 0 \Rightarrow -9x^2 + 18x - 6x = 0 \Rightarrow -9x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(4 - 3x) = 0.$$

Odsud již snadno určíme řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{4}{3}$. Protože jsme vyšli ze vztahu $x = y$, dostáváme body $\mathbf{A}_1 = [0, 0]$ a $\mathbf{A}_2 = [\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$.

Stejně tak dosadíme $x = -y$

$$-9x^2 + 18x - 6y = 0 \Rightarrow -9x^2 + 18x + 6x = 0 \Rightarrow -9x^2 + 24x = 0 \Rightarrow 3x(8 - 3x) = 0.$$

Opět snadno dopočítáme řešení $x_3 = \frac{8}{3}$.² A poznamenáme si další bod $\mathbf{A}_3 = [\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}]$.

Body $\mathbf{A}_1 = [0, 0]$, $\mathbf{A}_2 = [\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$ a $\mathbf{A}_3 = [\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}]$ jsou „podezřelé“, může v nich nastat extrém. Přesněji:

Důležité:

Necht' f je funkce n proměnných. Bod $\mathbf{A} \in \mathcal{D}_f$ se nazývá *stacionárním bodem* funkce f , jestliže

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{A}) = 0, \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, n.$$

Důležité:

Fermatova věta: Necht' funkce n proměnných f má v bodě $\mathbf{A} \in \mathcal{D}_f$ lokální extrém a necht' v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f . Pak $\mathbf{A}$ je *stacionární bod* funkce f .

Poznámka:

Stacionární body jsou „pouze podezřelé“, extrém v nich nastat nemusí.

Abychom zjistili, zda v $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ či $\mathbf{A}_3$ extrém opravdu je, musíme znovu derivovat. Pro funkci dvou proměnných to znamená čtyři druhé parciální derivace. Zde konkrétně:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18 - 18x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2.$$

Protože máme čtyři druhé derivace, nelze žádnou z nich upřednostit ani upozadit, naopak musíme je do úvah zahrnout všechny. Proto z druhých derivací sestavíme *Hessovu matici*, resp. determinant – tzv. *hessián*,

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 - 18x & -6 \\ -6 & 6y + 2 \end{vmatrix}.$$

K rozhodnutí o existenci lokálních extrémů a jejich povaze slouží *Sylvestrovo kritérium*:

²Řešení $x_1 = 0$ již známe.

Důležité:

Sylvestrovo kritérium: Pro stacionární bod $\mathbf{A}$ označme:

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Platí

- je-li $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$, pak je v bodě $\mathbf{A}$ ostré lokální minimum,
- je-li $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$, pak je v bodě $\mathbf{A}$ ostré lokální maximum,
- je-li $D_2 < 0$, pak v bodě $\mathbf{A}$ extrém neexistuje, jde o *sedlový bod*,
- je-li $D_2 = 0$, pak nelze o povaze stacionárního bodu $\mathbf{A}$ dle tohoto kritéria rozhodnout.

Zbývá determinant v jednotlivých „podezřelých“ bodech vyhodnotit,

$$D_2(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = -96, \quad D_2(\mathbf{A}_3) = \begin{vmatrix} -30 & -6 \\ -6 & -14 \end{vmatrix} = 384.$$

a rozhodnout

bod $\mathbf{A}_3$: má funkce lokální extrém, a to maximum. Determinant $D_2 = 384$ je kladný a $D_1 = -30$ je záporný.

bod $\mathbf{A}_2$: funkce lokální extrém nemá, protože determinant matice $D_2 = -14$ je záporný.

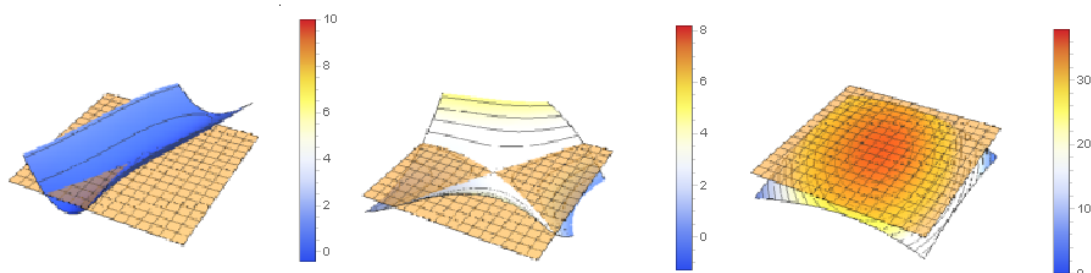
bod $\mathbf{A}_1$: je determinant je roven nule a podle Sylvestrova kritéria nelze rozhodnout. Pomoci může např. „analýza“ chování funkce v okolí „podezřelého“ bodu $\mathbf{A}_1$. Funkci lze psát ve tvaru $f(x, y) = (3x - y)^2 + (y^3 - 3x^3)$, a z tohoto tvaru je vidět, že budeme-li se kolem bodu $\mathbf{A}_1$ pohybovat po přímce $y = 3x$, pak máme $f(x, y) = f(x, 3x) = 24x^3$. Ovšem $24x^3$ je záporné pro $x < 0$ a kladné pro $x > 0$, proto v bodě $\mathbf{A}_1$ extrém nenastává.

Úlohu jsme vyřešili, ale podívejme se ještě na chování tečné roviny a gradientu ve stacionárních bodech.

Podle vzorce z kapitoly 4, viz strana 26, sestavme rovnice tečných rovin v „podezřelých“ bodech $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ resp. $\mathbf{A}_3$. Protože první parciální derivace jsou v těchto bodech nulové, mají tyto roviny tvar:

$$\tau : z = 0(x - A_x) + 0(y - A_y) + f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}).$$

Konkrétně je $\tau_1 : z = f(\mathbf{A}_1) = 0$, $\tau_2 : z = f(\mathbf{A}_2) = \frac{64}{27}$ a $\tau_3 : z = f(\mathbf{A}_3) = \frac{1024}{27}$. Jde tedy o roviny rovnoběžné s rovinou $z = 0$, což je znázorněno na obrázku 6.2. V případě maxima v bodě $\mathbf{A}_3$ je vidět, že graf funkce „v okolí“ tohoto bodu zůstává pod tečnou rovinou. V případě minima by graf funkce zůstával naopak nad tečnou rovinou. Pokud v bodě extrém není, viz body $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$, pak je graf funkce v okolí bodu nad i pod tečnou.

Obr. 6.2: Tečná rovina a graf fce $f(x, y)$ v bodech A_1 , A_2 a A_3 **Důležité:**

Je-li A stacionární bod funkce $f(x, y)$, pak má tečná rovina τ v tomto bodě tvar $z = f(A)$ a je rovnoběžná s rovinou $z = 0$. Gradient funkce f v bodě A je nulový vektor, tj. $\nabla f = [0, 0]$.

6.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x, y)$.

$$(6.1) \quad f(x, y) = 2 + x + \frac{x^3}{3} + y - xy.$$

$$(6.2) \quad f(x, y) = x^2 y^2 + \frac{x^2}{2} + y^3 - 3y + 3.$$

$$(6.3) \quad f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3.$$

$$(6.4) \quad f(x, y) = (2 - y)^2 + x^2 y.$$

$$(6.5) \quad f(x, y) = 3 - x + x^2 - y - xy + y^2.$$

$$(6.6) \quad f(x, y) = 125 - x^3 + 6xy - 8y^3.$$

$$(6.7) \quad f(x, y) = -6x + x^2 - 9y + xy + y^2.$$

$$(6.8) \quad f(x, y) = 5 + 2x + x^2 + 6y - y^2.$$

$$(6.9) \quad f(x, y) = 5 + x^3 - 6xy + 8y^3.$$

$$(6.10) \quad f(x, y) = 15 + x^3 - 18xy + y^3.$$

Výsledek úlohy:

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x, y)$.

$$(6.1) \quad A_1 = [1, 2] : NE.$$

$$(6.2) \quad A_1 = [0, -1] : NE, \\ A_2 = [0, 1] : min.$$

$$(6.3) \quad A_1 = [0, 0] : NE, \\ A_2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] : min.$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_1 = [-2, 0] : NE, \\ (6.4) \quad & \mathbf{A}_2 = [2, 0] : NE, \\ & \mathbf{A}_3 = [0, 2] : min. \end{aligned}$$

$$(6.5) \quad \mathbf{A}_1 = [1, 1] : min.$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE, \\ (6.6) \quad & \mathbf{A}_2 = \left[1, \frac{1}{2}\right] : MAX. \end{aligned}$$

$$(6.7) \quad \mathbf{A}_1 = [1, 4] : min.$$

$$(6.8) \quad \mathbf{A}_1 = [-1, 3] : NE.$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE, \\ (6.9) \quad & \mathbf{A}_2 = \left[1, \frac{1}{2}\right] : min. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6.10) \quad & \mathbf{A}_1 = [0, 0] : NE, \\ & \mathbf{A}_2 = [6, 6] : min. \end{aligned}$$

Kapitola 7

Implicitní funkce

V kapitole 2 jsme graf funkce dvou proměnných připodobňovali k reliéfní mapě a využívali *vrstevnic*. Vrstevnicí grafu funkce dvou proměnných je množina všech bodů, které splňují rovnici $f(x, y) = k$ pro $k \in \mathbb{R}$.

Cíl:



Na rovnice $f(x, y) = k$ či $f(x, y, z) = k$ lze nahlížet jako funkční předpis, jde o tzv. *implicitní* funkci. V této kapitole se s *implicitními funkcemi* seznámíme blíže, naučíme se počítat jejich derivaci a nalézt jejich tečnu či tečnou rovinu.

Čas:



Studium kapitoly Vám zabere 3 hodiny.

Předpoklady:



Využijeme poznatky předchozích kapitol, ředeevším parciálních derivací funkce více proměnných.

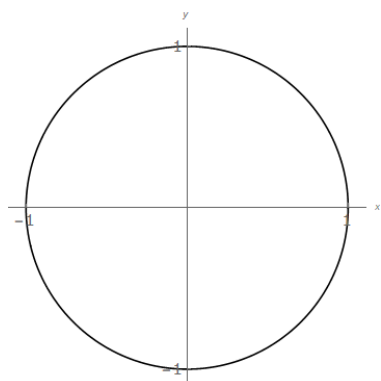
Budete umět:



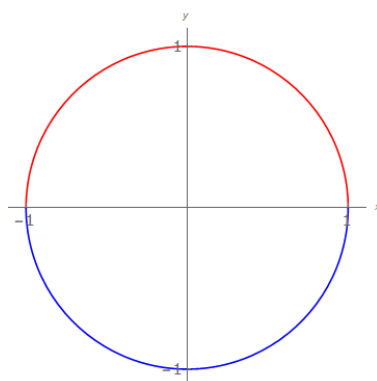
- Derivovat implicitně zadanou funkci,
- Najít tečnu a normálu implicitní funkce dvou proměnných,
- Najít tečnou rovinu a normálu implicitní funkce tří proměnných.

Stejně jako vrstevnice v mapě i vrstevnice grafu můžeme zakreslit jako rovinnou křivku. V příkladech kapitoly 2, str. 12, měly vrstevnice tvar přímek, kružnic, parabol či hyperbol, tj. dobře známých, dalo by se říci jednoduchých, křivek. Ovšem i při práci s nimi je třeba být obezřetný.

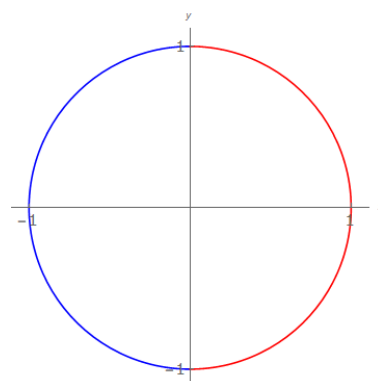
Uvažujme například kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Známe-li x -ovu souřadnici bodu, který na kružnici leží, pak tu y -ovou dopočteme nejen jako $y = \sqrt{1 - x^2}$, ale také jako $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Obdobně z y vyjadřujeme x , tj. $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$.



Obr. 7.1: Implicitní fce:
 $x^2 + y^2 = 1$



Obr. 7.2: Explicitní fce:
 $y = \sqrt{1-x^2}$
 $y = -\sqrt{1-x^2}$



Obr. 7.3: Explicitní fce:
 $x = \sqrt{1-y^2}$
 $x = -\sqrt{1-y^2}$

Na obrázku 7.1 vidíme, že rovnice $x^2 + y^2 = 1$ popisuje celou kružnici, naproti tomu obrázek 7.2 resp. obrázek 7.3 ukazuje, že snaha o vyjádření *explicitní* závislosti y na x resp. x na y vedla k rozdělení kružnice na dvě půlkružnice.

Zůstaneme-li u *implicitního* tvaru $x^2 + y^2 = 1$ nemusíme přemýšlet, které z vyjádření je vhodnější a zda se pohybuje v modré či červené půlkružnici. Navíc samozřejmě platí, že u „složitějších“ křivek bývá i explicitní vyjádření složitější.

Důležité:

Implicitní funkcí rozumíme způsob zadání funkce rovnicí:

implicitní fce:	$F(x, y) = 0,$	explicitní fce:	$y = f(x),$
implicitní fce:	$F(x, y, z) = 0,$	explicitní fce:	$z = f(x, y).$

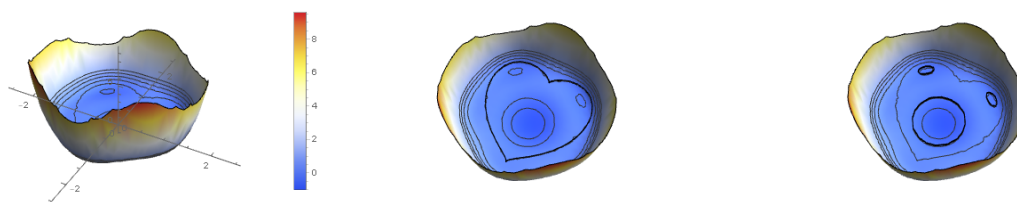
7.1 Řešené úlohy

Uvažujme funkci $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3$ a pokusme se popsat její vrstevnice. Pro konstanty $k \in \mathbb{R}$ tedy hledáme řešení rovnic

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3 = k.$$

Na obrázku 7.4 je jednak výřez grafu funkce a jednak v tomto grafu zvýrazněné vrstevnice pro hladiny $z = 0$ a $z = -\frac{1}{3}$. I z těchto dvou ukázek je patrné, že vrstevnice mohou nabývat nejrůznějších tvarů. V případě $z = 0$ vidíme srdce, v případě $z = -\frac{1}{3}$ pak tři „kroužky“.

Především však obrázek 7.4 ilustruje již několikrát zmíněný fakt:

Obr. 7.4: Graf $(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3$ a vrstevnice $z = 0$ resp. $z = -\frac{1}{3}$ **Důležité:**

Množina bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ vyhovujících rovnici $F(x, y) = 0$ může tvořit křivku, na kterou lze pohlížet jako na řez grafu $\mathcal{G}_F$ rovinou $z = 0$. Obdobně lze uvažovat i pro roviny $z = k, k \in \mathbb{R}$.

V grafu zakreslenou vrstevnici $(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3 = 0$, tak lze chápat jako křivku tvořenou všemi řešeními rovnice $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$. Některá z řešení lze odhadnout, například $x = 1, y = 1$, dále $x = -1, y = 1$ či $x = 0, y = \pm 1$. K nalezení dalších řešení si však s odhadem již nevystačíme. Abychom pracovat nemuseli se složitým funkčním předpisem, pokusíme se jej nahradit jednodušším. Lineárním. Tečnou.

Zadání - 7.1:

Nalezněte tečnu a normálu procházející bodem $\mathbf{A} = [1, 1]$ ke křivce zadané rovnicí

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3.$$

Využijte ji k řešení rovnice pro $x_1 = 0.9$ a $x_2 = 1.1$.

Pokud bychom chtěli ze zadané rovnice vyjádřit y jako funkci proměnné x narazíme. Již při roznásobení levé strany totiž dostáváme tvar

$$x^6 + 3x^4 y^2 - 3x^4 + 3x^2 y^4 - 6x^2 y^2 + 3x^2 + y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1 = x^2 y^3,$$

který neskýtá příliš šancí na jednoduché úpravy. Opravdu se tedy vyplatí uvažovat o použití vlastností *implicitních* funkcí a jejich derivací.

Nejprve si rovnici přepíšeme do tvaru

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3 = 0,$$

jehož levou stranu si označíme za $F(x, y)$. Dále spočteme parciální derivace této funkce $F(x, y)$ podle x , tj. $F_x(x, y)$, resp. podle y , tj. $F_y(x, y)$ a také jejich hodnoty v bodě $\mathbf{A} = [1, 1]$.

$$F_x(x, y) = 3(x^2 + y^2 - 1)^2 (2x) - 2xy^3 = 6x(x^2 + y^2 - 1)^2 - 2xy^3, \quad F_x(\mathbf{A}) = 4,$$

$$F_y(x, y) = 3(x^2 + y^2 - 1)^2 (2y) - x^2 (3y^2) = 6y(x^2 + y^2 - 1)^2 - 3x^2 y^2, \quad F_y(\mathbf{A}) = 3.$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do vztahů (vzorců) pro výpočet tečny resp. normály

Důležité:

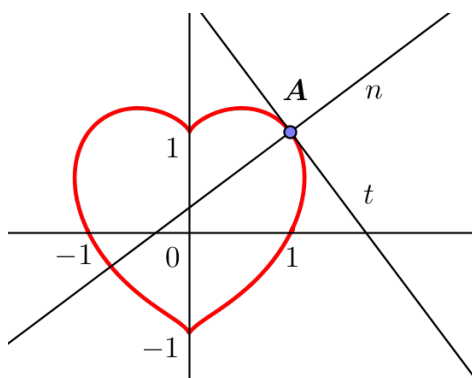
Tečna a normála k implicitní funkci určené rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $\mathbf{A} = [x_0, y_0]$ jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned} t : F_x(\mathbf{A})(x - x_0) + F_y(\mathbf{A})(y - y_0) &= 0, \\ n : F_y(\mathbf{A})(x - x_0) - F_x(\mathbf{A})(y - y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Dosazení souřadnic bodu $\mathbf{A}$ do předchozích vztahů vede k rovnicím tečny a normály v tomto bodě:

$$\begin{aligned} t : 4(x - 1) + 3(y - 1) &= 4x + 3y - 7 = 0, \\ n : 3(x - 1) - 4(y - 1) &= 3x - 4y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Graficky je vše znázorněno na obr. 7.5, bod dotyku $\mathbf{A}$, tečna t a k ní kolmá normála n . Graf nám také opět připomene, že nalezení *explicitní* funkce či spíše funkcí popisujících tuto křivku by bylo značně komplikované.



Obr. 7.5: Křivka $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$ s tečnou t a normálou n

Protože na vhodném okolí bodu $\mathbf{A}$ aproximuje křivku tečna t , využijeme ji k nalezení řešení pro $x_1 = 0.9$ resp. $x_2 = 1.1$. Z tvaru $4x + 3y - 7 = 0$ vyjádříme $y = \frac{7-4x}{3}$ a x_1 resp. x_2 dosadíme. Dostáváme tak $y = \frac{17}{15} = 1.1\bar{3}$ resp. $y = \frac{13}{15} = 0.8\bar{6}$. Hodnoty, které obdržíme při numerické/počítačovém výpočtu jsou $1.10423\dots$ resp. $y = 0.804604\dots$, v našem odhadu jsme se tedy dopustili chyby v řádu setin.

Poznamenejme ještě, že jsme našli pouze řešení v okolí bodu dotyku $\mathbf{A}$. Z grafu 7.5 je však patrná existence dalšího řešení pro x_1 a x_2 . Numerický výpočet vede k řešením $y = -0.17206\dots$ a $y = 0.26099\dots$. K jejich odhadu může posloužit tečna v bodě $\mathbf{B} = [1, 0]$.¹

Obdobně jako rovnice $F(x, y) = 0$ představuje křivku v rovině, lze na řešení rovnice

¹Její vyjádření je ponecháno laskavému čtenáři jako cvičení.

$F(x, y, z) = 0$ nahlížet jako na množinu bodů definující plochu v prostoru $\mathbb{R}^3$. A „křivou“ plochu lze aproximovat „rovnou“ tečnou rovinou.

Zadání - 7.2:



Nalezněte tečnou rovinu a normálu procházející bodem $\mathbf{A} = [1, 1, 1]$ k ploše zadané rovnicí

$$(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^3 = (7x^2 + y^2)z^3.$$

Stejně jako v předchozím příkladě si nejprve rovnici převedeme do tvaru s nulovou pravou stranou

$$(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^3 - (7x^2 + y^2)z^3 = 0.$$

Levou stranu si označíme $F(x, y, z)$ a dále budeme postupovat analogicky s postupem hledání tečny a normály v případě $F(x, y) = 0$.

Využijeme-li nejprve možností výpočetní techniky, můžeme si nejprve plochu vykreslit. Z obrázku ?? je jasné vidět, že popis takové plochy pomocí funkce nebo funkcí dvou proměnných by byl značně komplikovaný. Opět tak docházíme k poznání, že se popis pomocí funkce *implicitní* opravdu vyplácí.

K sestrojení tečné roviny potřebujeme spočítat derivace a dosadit do nich bod $\mathbf{A}$

$$F_x(x, y, z) = 6x(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^2 - 14xz^3, \quad F_x(\mathbf{A}) = 10,$$

$$F_y(x, y, z) = 24y(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^2 - 2yz^3, \quad F_y(\mathbf{A}) = 94,$$

$$F_z(x, y, z) = 6z(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^2 - 3z^2(7x^2 + y^2), \quad F_z(\mathbf{A}) = 0.$$

Vypočtené hodnoty použijeme ve vzorci tečné roviny, který má tvar:

Důležité:



Tečná rovina τ a normála n k implicitní funkci určené rovnicí $F(x, y, z) = 0$ v bodě $\mathbf{A} = [x_0, y_0, z_0]$ jsou dány rovnicemi:

$$\tau : F_x(\mathbf{A})(x - x_0) + F_y(\mathbf{A})(y - y_0) + F_z(\mathbf{A})(z - z_0) = 0,$$

$$n : x = x_0 + F_x(\mathbf{A})t,$$

$$y = y_0 + F_y(\mathbf{A})t,$$

$$z = z_0 + F_z(\mathbf{A})t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Což v našem případě znamená tečnou rovinu ve tvaru

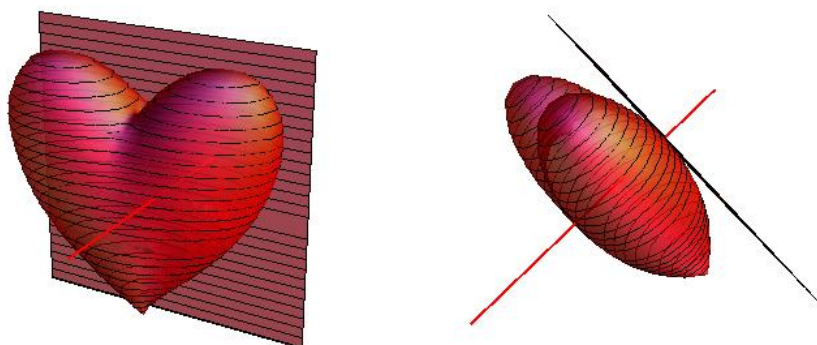
$$\tau : 10(x - 1) + 94(y - 1) + 0(z - 1) = 0,$$

$$\tau : 10x + 94y - 104 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau : 5x + 47y - 52 = 0.$$

Koeficienty obecné rovnice roviny $ax + by + cz + d = 0$ určují její normálový vektor $\mathbf{n} = [a, b, c]$. V našem případě má tvar $\mathbf{n} = [5, 47, 0]$. Protože hledaná normála prochází bodem $\mathbf{A} = [1, 1, 1]$ můžeme její rovnici parametricky zapsat jako

$$x(t) = 1 + 5t, \quad y(t) = 1 + 47t, \quad z(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Na obrázku 7.6 je zvolen úhel pohledu tak, že v něm tečná rovina vypadá jako přímka (černá), je tak lépe patrné, jak se plochy dotýká. Červeně je pak zaznačena k ní kolmá normála.



Obr. 7.6: Plocha $(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)^3 = (7x^2 + y^2)z^3$ s tečnou rovinou a normálou

7.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:



K implicitně zadané funkci $y = y(x)$ určete rovnici tečny t a normály n v bodě A .

$$(7.1) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 5 = 0, \quad A = [8, 1].$$

$$(7.5) \quad \ln(x^3 + y^2) = 0, \quad A = [-2, 3].$$

$$(7.2) \quad (2 - xy)(x - y)^2 = 0, \quad A = [1, 2].$$

$$(7.6) \quad 1 - \sqrt{y^2 - x^3} = 0, \quad A = [2, 3].$$

$$(7.3) \quad (y - x)e^{1-xy} = 0, \quad A = [1, 1].$$

$$(7.7) \quad x^2y + xy^2 = 0, \quad A = [-1, 1].$$

$$(7.4) \quad \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2} = 0, \quad A = [2, -4].$$

$$(7.8) \quad \cos(1 - x^2y) + x = 0, \quad A = [-1, 1].$$

Úloha:



K implicitní funkci $z = z(x, y)$ určete tečnou rovinu τ v bodě A .

$$(7.9) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0, \quad A = [1, -2, 3]$$

$$(7.13) \quad \frac{3x}{y} + \frac{2y}{z} + \frac{z}{x} = 0, \quad A = [1, 1, -1].$$

$$(7.10) \quad xy + xz + yz + 1 = 0, \quad A = [1, 2, -1]$$

$$(7.14) \quad x + y^2 + z^3 - xyz = 0, \quad A = [-4, 2, 0].$$

$$(7.11) \quad xyz - x - y - z + 2 = 0, \quad A = [1, -1, 1]$$

$$(7.15) \quad 4 - y^2z^2 + x^3(y + z), \quad A = [0, 1, 2].$$

$$(7.12) \quad xyz + yz^2 + z^3 = 0, \quad A = [0, 1, -1].$$

$$(7.16) \quad (2 - xy^2z^3)^2 - 1 = 0, \quad A = [1, 1, 1].$$

Výsledek úlohy: _____



K implicitně zadané funkci $y = y(x)$ určete rovnici tečny t a normály n v bodě A .

$$(7.1) \quad \begin{aligned} t : x + y - 10 &= 0, \\ n : 2x - y - 15 &= 0. \end{aligned}$$

$$(7.2) \quad \begin{aligned} t : 2x + y - 4 &= 0, \\ n : x - 2y + 3 &= 0. \end{aligned}$$

$$(7.3) \quad \begin{aligned} t : x - y &= 0, \\ n : x + y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

$$(7.4) \quad \begin{aligned} t : 4x + y - 4 &= 0, \\ n : x - 4y - 18 &= 0. \end{aligned}$$

$$(7.5) \quad \begin{aligned} t : 2x + y + 1 &= 0, \\ n : x - 2y + 8 &= 0. \end{aligned}$$

$$(7.6) \quad \begin{aligned} t : 2x - y - 1 &= 0, \\ n : x + 2y - 8 &= 0. \end{aligned}$$

$$(7.7) \quad \begin{aligned} t : x + y - 2 &= 0, \\ n : x &= y. \end{aligned}$$

$$(7.8) \quad \begin{aligned} t : x &= -1, \\ n : y &= 1. \end{aligned}$$

Výsledek úlohy: _____



K implicitní funkci $z = z(x, y)$ určete tečnou rovinu τ v bodě A .

$$(7.9) \quad \tau : x - 2y + 3z - 14 = 0.$$

$$(7.10) \quad \tau : x + 3z + 2 = 0.$$

$$(7.11) \quad \tau : x + z - 2 = 0.$$

$$(7.12) \quad \tau : x - y - z = 0.$$

$$(7.13) \quad \tau : 4x - 5y - z = 0.$$

$$(7.14) \quad \tau : x + 4y + 8z - 4 = 0.$$

$$(7.15) \quad \tau : 2y + z - 4 = 0.$$

$$(7.16) \quad \tau : x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

Kapitola 8

Vektorové pole

Cíl:



Cílem kapitoly je objasnit pojmy *vektorové funkce* a *vektorového pole*, definovat a popsat jejich základní charakteristiky jako jsou *divergence* a *rotace*.

Čas:



Kapitola a její prostudování Vám zabere 4 hodiny.

Předpoklady:



Využijeme základní operace vektory, které pomocí operátoru ∇ skloubíme se vzorci pro derivace a parciální derivace.

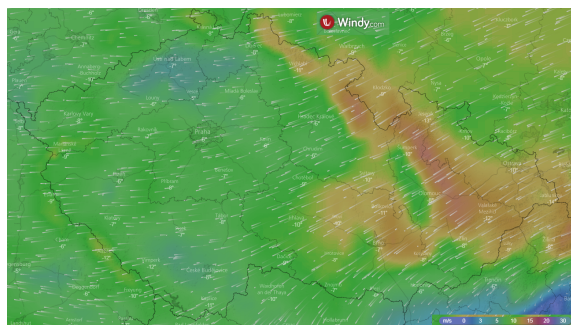
Budete umět:



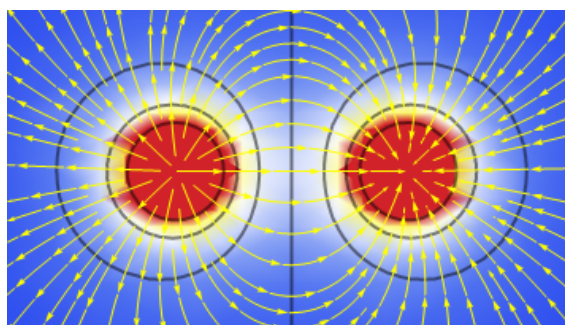
- Popsat a zakreslit vektorové pole.
- Spočítat *divergenci* vektorového pole, rozhodnout, zda jde o pole *zřídlové* či *nezřídlové*.
- Spočítat *rotaci* vektorového pole, rozhodnout, zda jde o pole *vírové* či *nevírové*.

Na úvod kapitoly si prohlédneme dva obrázky. První, obr. 8.1, zachycuje povětrnostní situaci, rychlost a směr větru nad Českou republikou. Druhý, obr. 8.2, siločárový model elektrostatického pole.

Společným „jmenovatelem“ obou je pojem „vektorového pole“ resp. „vektorové funkce“, tj. funkce, která každému bodu přiřadí vektor. V našem případě vektor popisující směr a rychlost větru, resp. vektor intenzity elektrického pole.



Obr. 8.1: Větrná mapa



Obr. 8.2: Elektrostatické pole

Důležité:

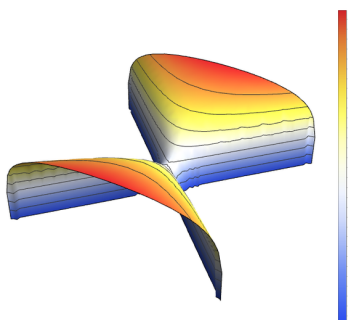
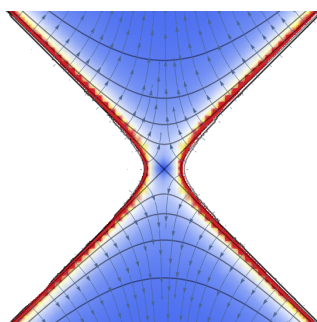
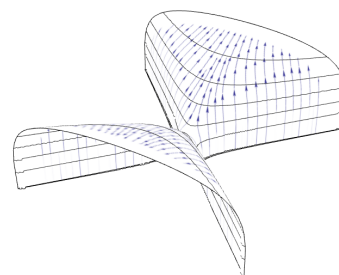
Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, pak vektorové pole definuje vektorová funkce $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = [F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

Nejčastěji se zde budeme setkávat s vektorovým polem v $\mathbb{R}^3$, které budeme zapisovat

$$\mathbf{f}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)], \text{ resp. } \mathbf{f}(x, y, z) = [P, Q, R].$$

S vektorovým polem, přestože jsme to explicitně nezmínili, jsme se mohli setkat již v kapitole věnované gradientu, viz kapitola 5. V řešeném příkladě na str. 5 jsme vyšetřovali funkci $f(x, y) = \ln(1 - x^2 + y^2)$, graf viz obrázek 8.3. Při její výpočtu směrové derivace jsme si pomáhali vektorem *gradientu*, $\nabla f(x, y)$, tj. směrem nejvyššího růstu.

Obr. 8.3: Graf
 $\ln(1 - x^2 + y^2)$ Obr. 8.4: Gradient a
vrstevniceObr. 8.5: Gradient
na ploše $\ln(1 - x^2 + y^2)$

Pokud gradient spočteme v každém bodě definičního oboru funkce, přiřazujeme těmto bodům vektor, čímž definujeme *vektorové pole*. Je zakresleno na obrázku 8.4, na němž si můžeme všimnout a připomenout, že vektor gradientu je kolmý na vrstevnice.

Zatímco na grafu 8.3 značí **modrá** záporné funkční hodnoty a **červená** kladné, na obrázku 8.4 je **červená** resp. **modrá** barva značí větší resp. menší velikost gradientu.

Protože platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, platí také, že blížeme-li se k hranici definičního oboru, tj. k hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, blíží se $-\infty$ i funkční hodnoty $f(x, y)$. Pro $x^2 = y^2$, tj. na

přímkách $x = y$ a $x = -y$ je $f(x, y) = 0$. I z toho lze vidět, že růst v funkčních hodnot je tedy „červené oblasti“ grafu 8.4 značně rychlý. Což neznamená nic jiného než, že je značná i velikost gradientu.

Pro porovnání velikostí vektorů *gradientu* jsou na obrázku 8.5 tyto vektory zakresleny na ploše grafu funkce $f(x, y)$.

Z uvedeného je patrné, že vektorové pole mám může pomoci s popisem vlastností skalární funkce.

Podobně můžeme i poli vektorovému $\mathbf{f}(x, y, z)$ přiřadit pole skalární či (jiné) pole vektorové a usuzovat tak na vlastnosti pole $\mathbf{f}(x, y, z)$. Více si ukážeme v následujících řešených příkladech.

Zadání - 8.1:



Vyšetřeme vektorové pole $\mathbf{f}(x, y) = [xy, y^2 - x^2]$.

Než přejdeme k „vyšetřování“, vzpomeňme si na úvodní obrázky 8.1 a 8.2. Ať už šlo o vítr či elektrostatickou intenzitu, mohli jsme v každém bodě určit odpovídající směr a velikost, tedy vektor.

To samozřejmě můžeme i v případě *vektorové funkce* $\mathbf{f}(x, y) = [xy, y^2 - x^2]$. Pro ilustraci si zvolme několik bodů a určíme „sílu“ v nich působící, tj. příslušné vektory a jejich velikosti¹

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 = [1, 1] : \quad \mathbf{f}(1, 1) &= [1 \cdot 1, 1^2 - 1^2] = [1, 0], & \|\mathbf{f}(1, 1)\| &= 1, \\ \mathbf{A}_2 = [2, 1] : \quad \mathbf{f}(2, 1) &= [2 \cdot 1, 1^2 - 2^2] = [2, -3], & \|\mathbf{f}(2, 1)\| &= \sqrt{13}, \\ \mathbf{A}_3 = [2, -1] : \quad \mathbf{f}(2, -1) &= [-2 \cdot 1, 1^2 - (-2)^2] = [-2, -3], & \|\mathbf{f}(2, -1)\| &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Výsledné vektorové pole je zakresleno v grafech 8.6 a 8.7.² Na obrázku 8.7 vektory navíc doplňují *siločáry*.

Poznámka:



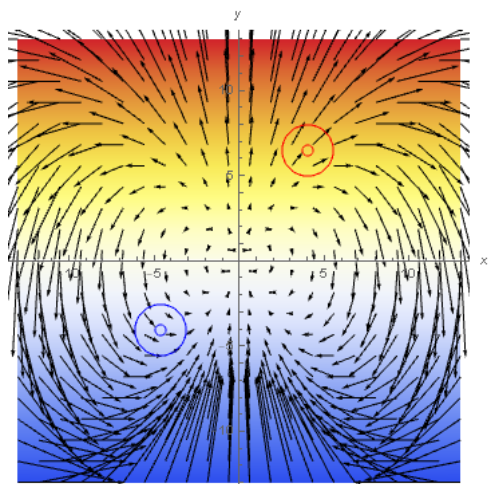
Siločára je „myšlená“ křivka popisující působení *silového* resp. *vektorového* pole v prostoru. Přitom platí, že vektor *intenzity* pole je k siločáře v každém jejím bodě *tečný*.

Hlavním rozdílem mezi grafem 8.6 a 8.7 je však jejich podbarvení. Proto se u něj zastavíme a blíže jej popíšeme.

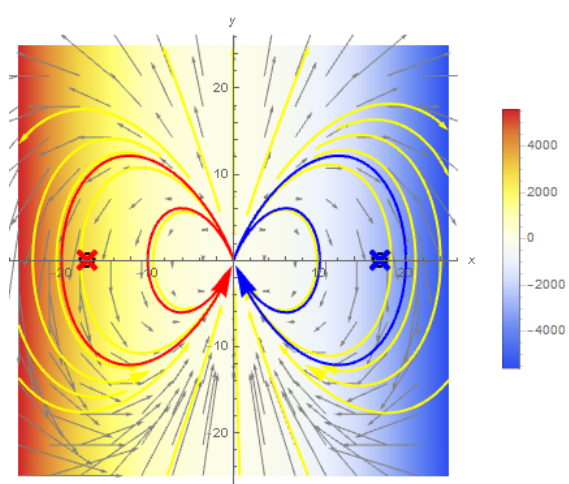
Začneme grafem 8.6, kromě vektorů je zde **červený** a **modrý** kroužek. Podíváme-li se pozorně na **červený** můžeme si všimnout, že „více a větších vektorů z něj vystupuje než do něj vstupuje“. U **modrého** je situace opačná. Použijeme-li „nadsázky“ můžeme říci, že v **červeném** kroužku „vektory vznikají“, jde o *zdroj* či *zřídlo*. Obdobně bychom mohli tvrdit, že v **modrém** kroužku „vektory zanikají“ a mluvit o *norách*.

¹vektory, vlastnosti, velikost, viz kapitola 1

²Pro větší názornost je však v grafech změněno měřítko



Obr. 8.6: Vektorové pole



Obr. 8.7: Siločáry

K rozhodnutí, zda je bodě *zřídlo* či *nora*, slouží *divergence vektorového pole*. Její výpočet provedeme v řešeném příkladě 8, zde postačí konstatování, že červené podbarvení odpovídá jejím kladným hodnotám a modré hodnotám záporným.

Poznamenejme ještě, pouze s pomocí grafu a bez výpočtu, že *divergence* $\mathbf{f}(x, y)$ je rovna nule pro $y = 0$, tj. na ose x . Ilustrujme to na vektorech v bodech $[x, y]$ a $[x, -y]$, které leží „blízko“ této osy. Vektory, síly, v nich působící mají stejnou velikost³⁴ a přes osu x přechází, sečteme-li je výsledkem vektor $[0, -2y^2]$ ⁵. Bude-li se y zmenšovat, tj. $y \rightarrow 0$,⁶ bude se zmenšovat i výsledný součet vektorů. Co vstoupí, to vystoupí, divergence je nulová.

Na obrázku 8.7 se soustředíme na siločáry a představme si je jako proud vzduchu či vody. Proud má svůj směr i velikost⁷ a postavíme-li mu do cesty „vrtulku“, roztočí ji. Červenou vrtulku pole roztáčí „proti směru hodinových ručiček“, naopak modrá je roztáčena „po směru hodinových ručiček“. Hodnoty barevné škály značí velikost resp. rychlost této rotace.

Protože zde mluvíme o směru a velikosti otáčení, budeme k popisu tohoto jevu potřebovat vektor. Vektorovému poli tedy přiřadíme vektorové pole, které budeme nazývat *rotací vektorového pole*.

V případě *divergence vektorového pole* jsme si vystačili s jedním číslem, vektorovému poli jsme tedy přiřadili *pole skalární*.

Než přejdeme k dalšímu řešenému příkladu 8, definujme *divergenci* a *rotaci* přesněji. K tomu budeme potřebovat operátor ∇ .

³ponecháno jako cvičení laskavému čtenáři

⁴viz ilustrační body $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$

⁵ponecháno jako cvičení laskavému čtenáři

⁶ano, limity a derivace

⁷daný vektory působící síly

Důležité:

Operátor ∇ (čti *nabla* nebo *Hamiltonián*) definujeme jako

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right].$$

S pomocí operátoru ∇ a „skalárního“, $\cdot$, resp. „vektorového“, $\times$, součinu „vektorů“⁸ definujeme:

Důležité:

Necht' $\mathbf{f}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$ je vektorové pole v oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. *Divergenci* pole $\mathbf{f}$ nazýváme skalární pole $\nabla \cdot \mathbf{f}$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \mathbf{f} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [P, Q, R] = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Je-li $\nabla \cdot \mathbf{f}(X) = 0$ v každém bodě $X \in \Omega$, nazýváme pole $\mathbf{f}$ *nezřídlové*. Body, v nichž platí $\nabla \cdot \mathbf{f}(X) > 0$ resp. $\nabla \cdot \mathbf{f}(X) < 0$, nazýváme *zřídla* resp. *nory*.

Důležité:

Necht' $\mathbf{f}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$ je vektorové pole v oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. *Rotaci* pole $\mathbf{f}$ nazýváme vektorové pole $\nabla \times \mathbf{f}$:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \times [P, Q, R] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right].$$

Jestliže $\nabla \times \mathbf{f}(X) = [0, 0, 0]$ v každém bodě $X \in \Omega$, nazýváme pole $\mathbf{f}$ *nevírové*.

Poznámka:

Divergenci pole $\mathbf{f}$ značíme také jako $\text{div } \mathbf{f}$. A pro *rotaci* užíváme $\text{rot } \mathbf{f}$ a v anglické literatuře $\text{curl } \mathbf{f}$.

Teď již můžeme divergenci a rotaci vektorového pole nejen odhadovat na základě grafů, ale podle uvedených definic je přesně spočítat.

Zadání - 8.2:

Vypočítejte divergenci a rotaci pole $\mathbf{f} = (x, y, z) = [x^2y + z, 1 - xy^2, x + y]$ a rozhodněte, zda je pole zřídlové nebo vírové.

⁸Uvozovky jsou zde, neboť nejde o vektory a násobení jako v kapitole 1

Přejdeme rovnou k výpočtům a začneme divergencí.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{f} &= \nabla \cdot \mathbf{f} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [x^2y + z, 1 - xy^2, x + y] = \\ &= \frac{\partial x^2y + z}{\partial x} + \frac{\partial 1 - xy^2}{\partial y} + \frac{\partial x + y}{\partial z} = 2xy + (-2xy) + 0 = 0.\end{aligned}$$

Protože platí $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ je pole $\mathbf{f}$ nezřídlové.

Dále rotace

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{f} &= \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y + z & 1 - xy^2 & x + y \end{vmatrix} = \\ &= \left[\frac{\partial(x+y)}{\partial y} - \frac{\partial(1-xy^2)}{\partial z}, \frac{\partial(x^2y+z)}{\partial z} - \frac{\partial(x+y)}{\partial x}, \frac{\partial(1-xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y+z)}{\partial y} \right] = \\ &= [1 - 0, 1 - 1, -y^2 - x^2] = [1, 0, -x^2 - y^2].\end{aligned}$$

Pro vektor rotace platí, $\operatorname{rot} \mathbf{f} = [1, 0, -x^2 - y^2] \neq [0, 0, 0]$, jde tedy o pole vírové.

Poznámka:



V řešeném příkladě 8 jsme divergenci a rotaci popsali pouze podle grafů. Zapišeme-li pole

$$\mathbf{f}(x, y) = [xy, y^2 - x^2] \text{ jako } \mathbf{f}(x, y, z) = [xy, y^2 - x^2, 0],$$

lze jeho *divergenci* a *rotaci* spočítat podle výše uvedených vzorců. Dostaneme tak $\operatorname{div} \mathbf{f} = 3y$ a $\operatorname{rot} \mathbf{f} = [0, 0, -3x]$.

Z tvaru $[0, 0, -3x]$ je ihned vidět, že jde o vektor kolmý⁹ k rovině $z = 0$, která je *rovinou otáčení*. Jeho velikost je rovna $9x^2$ a udává rychlost otáčení. A konečně orientace vektoru $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ určuje směr otáčení.

Úloha:



Vypočtěte divergenci a rotaci pole $\mathbf{f}$ a rozhodněte, zda je pole zřídlové nebo vírové.

$$(8.1) \quad \mathbf{f}(x, y, z) = [x^2 + yz, xz + y^2, xy + z^2].$$

$$(8.5) \quad \mathbf{f}(x, y, z) = \left[\frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, \frac{z}{xy} \right].$$

$$(8.2) \quad \mathbf{f}(x, y, z) = [\sin(y) + z, x \cos(y) - z, 0].$$

$$(8.6) \quad \mathbf{f}(x, y, z) = [xy - z^2, yz - x^2, xz - y^2].$$

$$(8.3) \quad \mathbf{f}(x, y, z) = [x^2, -2xy - 2yz, z^2].$$

$$(8.7) \quad \mathbf{f}(x, y, z) = [z^2 - y^2, x^2 - z^2, y^2 - x^2].$$

$$(8.4) \quad \mathbf{f}(x, y, z) = [\ln(x+y), x+y, z \ln(z)].$$

$$(8.8) \quad \mathbf{f}(x, y, z) = [x^2y - z, y^2z - x, xz^2 - y].$$

⁹Připomeňme si, že vektorový součin $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Výsledek úlohy:



Vypočtěte divergenci a rotaci pole f a rozhodněte, zda je pole zřídlové nebo vírové.

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} f &= 2x + 2y + 2z, \text{ zřídlové,} \\ \operatorname{rot} f &= [0, 0, 0], \text{ nevírové.} \end{aligned}$$

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} f &= -x \sin(y), \text{ zřídlové,} \\ \operatorname{rot} f &= [1, 1, 0], \text{ vírové.} \end{aligned}$$

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} f &= 0, \text{ nezřídlové,} \\ \operatorname{rot} f &= [2y, 0, -2y], \text{ vírové.} \end{aligned}$$

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} f &= \frac{1}{x+y} + \ln(z) + 2, \text{ zřídlové,} \\ \operatorname{rot} f &= \left[0, 0, 1 - \frac{1}{x+y} \right], \text{ vírové.} \end{aligned}$$

$$(8.5) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} f &= \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}, \text{ zřídlové,} \\ \operatorname{rot} f &= \left[\frac{y}{xz^2} - \frac{z}{xy^2}, \frac{z}{x^2y} - \frac{x}{yz^2}, \frac{x}{y^2z} - \frac{y}{x^2z} \right], \text{ vírové.} \end{aligned}$$

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} f &= x + y + z, \text{ zřídlové,} \\ \operatorname{rot} f &= [-3y, -3z, -3x], \text{ vírové.} \end{aligned}$$

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} f &= 0, \text{ nezřídlové,} \\ \operatorname{rot} f &= [2y + 2z, 2x + 2z, 2x + 2y], \text{ vírové.} \end{aligned}$$

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} f &= 2xy + 2xz + 2yz, \text{ zřídlové,} \\ \operatorname{rot} f &= [-y^2 - 1, -z^2 - 1, -x^2 - 1], \text{ vírové.} \end{aligned}$$

Kapitola 9

Dvojný integrál

Když jsme v kapitole 3 začínali mluvit o derivacích, pomáhali jsme si analogií pohybu v krajině a odpovídali na otázku „jak se mění *nadmořská výška za tři kroky*.“ Od těchto velmi vágních úvah jsme poté přešli k výpočtu limity $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, tedy k derivaci.

Navážeme-li v této kapitole na ony vágní úvahy, můžeme se odvážit říci, že derivování je vlastně jakési „lepší“ dělení. A umíme-li „lépe“ dělit, bylo by dobré umět také „lépe“ násobit - *integravat*.

Vynásobíme-li 3 a 4, lze na výsledek nahlížet jako na obsah obdélníku s délkami stran 3 a 4. Samozřejmě že násobení najde mnohem více použití.

Nové „lepší“ násobení, *integrování*, by tedy mělo také zvládnout počítat obsah ploch. A samozřejmě ještě mnoho navíc.

Cíl:



Cílem kapitoly je zopakovat základy teorie integrálu jedné proměnné a použít tyto znalosti k zavedení integrálu funkce dvou proměnných. Nejprve budeme integrovat na obdélníku a poté na obecné rovinné oblasti, přitom se naučíme metody výpočtu. Dále objasníme pojem Riemannova dvojrozměrného integrálu v obecné uzavřené oblasti a ukážeme způsob jeho výpočtu.

Čas:



Kapitola je poměrně obsáhlá a náročná, její prostudování tak zabere 5 hodin.

Předpoklady:



Budeme potřebovat znalost integračních vzorců a metod (*substituce, per partes*), výpočet určitého integrálu (*Newton-Leibnitzova formule*). Také znalosti z analytické geometrie, rovnice úseček, přímků či kuželoseček.

Budete umět:

- Vypočítat *dvojný* integrál na obdélníku převedením na integrál *dvojnásobný*
- Popsat obecnou rovinnou oblast Ω vzhledem k ose x (I. typ) či vzhledem k ose y (II. typ)
- Vypočítat *dvojný* integrál na obecné rovinné oblasti Ω

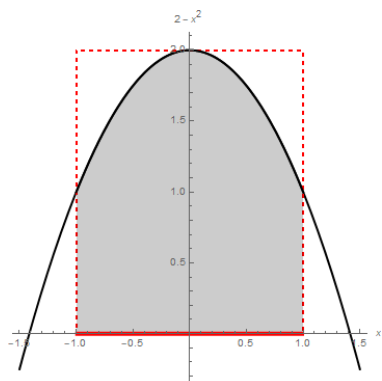
Začneme však návratem k funkci jedné proměnné a počítání obsahu ploch.

9.1 Řešené úlohy

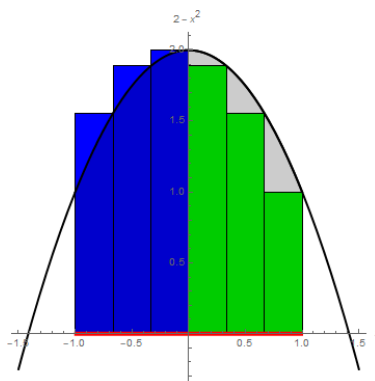
Zadání - 9.1:

Určeme velikost plochy mezi osou x a grafem funkce $f(x) = 2 - x^2$ pro $-1 \leq x \leq 1$.

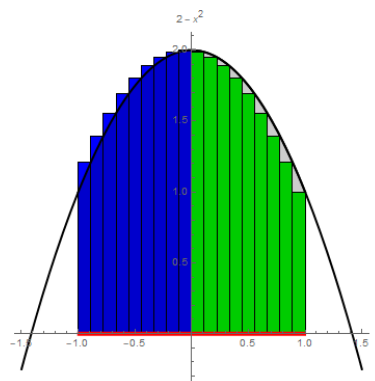
Dobрым začátkem je náčrtek situace. Zde je to obrázek 9.1, na kterém je kromě funkce $2 - x^2$ šedě zvýrazněna plocha, jejíž plochu máme určit. Dále **červeně** interval $-1 \leq x \leq 1$, nad nímž „leží“ naše plocha, a který je také podstavou **červený** obdélník¹. Plocha tohoto obdélníku, je dána jako součin podstavy a výšky, což je $2 \cdot 2 = 4$. Hledaná velikost šedé plochy tedy bude menší než čtyři.



Obr. 9.1: $f(x) = 2 - x^2$
„v jednom obdélníku“



Obr. 9.2: $f(x) = 2 - x^2$
„v šesti obdélnících“



Obr. 9.3: $f(x) = 2 - x^2$
„v osmnácti obdélnících“

Určitě najdeme odvětví, kde se s takovým odhadem spokojí. My se jej však pokusíme zpřesnit. Cesta k tomuto cíli je snadná. Stačí šedou oblast pokrýt „lépe“. Na obrázku 9.2 resp. obrázku 9.3 je použito šesti resp. osmnácti obdélníků. K odhadu tedy stačí spočítat 6 resp. 18 součinů a sečíst je. Samozřejmě stále půjde jen o odhad, **modré obdélníky** přidávají něco navíc, **zeleným obdélníkům** něco chybí.

¹čtverec, nenechte se zmást měřítkem os

Cesta k přesnému výsledku vede přes další zjemnění, zmenšení velikosti „podstav“ jednotlivých obdélníků. „Výšky“ obdélníků jsou dány funkční hodnotou $f(x)$. Máme tedy násobit podstavy, pro jejichž velikost chceme $\Delta x \rightarrow 0$, a výšky, které se „stále“ mění. Proto budeme potřebovat „lepší“ násobení - *integrování*. Tj.

$$\int_{-1}^1 (2 - x^2) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left(2 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{8}{3}.$$

Velikost plochy tedy je $S = \frac{8}{3}$. Při výpočtu jsme použili vzorce $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a *Newton-Leibnitzovy formule*. Další vzorce opakujeme:

Důležité:

Neurčitý integrál, (primitivní funkce)

$$\int f(x) dx = F(x), \quad F'(x) = f(x).$$

Určitý integrál, (např. velikost plochy), *Newton-Leibnitzova formula*

$$I = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Postup výpočtu: přímá integrace pomocí vzorců, metoda *per partes*, *substituční metoda* a další.

Důležité:

Integrál elementárních funkcí

$$\int k dx = kx + c, \quad k \in \mathbb{R}, k \text{ konst.}, \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad x > 0, n \in \mathbb{R}, n \neq -1,$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \text{ konst.},$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}, e \text{ Eulerovo číslo}, \quad \int \frac{1}{x \ln a} dx = \log_a x + c, \quad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, a \text{ konst.},$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad x \in \mathbb{R}, x > 0,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{cotg} x + c, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \operatorname{arccotg} x + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

Důležité:

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce jedné proměnné, $F(x)$ a $G(x)$ jejich primitivní funkce. A dále $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Platí:

$$\int (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx \pm \beta \int g(x) dx = \alpha F(x) \pm \beta G(x) + c.$$

Poznámka:

Zapišme si funkci $f(x) = x^2$ a její derivaci $f'(x)$ a primitivní funkci $F(x)$, tj.

$$f'(x) = 2x, \quad F(x) = \frac{x^3}{3},$$

z nich je patrné, že u derivování došlo k „dělení“ a při integrování „násobení“ x .

Přejdeme k dalšímu „postupnému“ kroku, kterým je použití „nového lepšího“ násobení také pro funkce více proměnných.

Zadání - 9.2:

Určete objem tělesa mezi rovinou $z = 0$ a plochou $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ pro $-1 \leq x \leq 1$ a $0 \leq y \leq 1$.

Grafem funkce $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ je trojrozměrná plocha a výpočet objemu „tělesa pod grafem“ je nejpřirozenějším zobecněním úvah z příkladu 9.1.

Grafem funkce $f(x) = 2 - x^2$ je parabola. Grafem $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ povrchová plocha rotačního paraboloidu². Plochu omezenou funkcí $f(x)$ jsme odhadovali obdélníky. Zde hledaný objem můžeme odhadnout pomocí kvádrů.

Na obrázku 9.4 je nejen část grafu $f(x, y)$, tj. plochy paraboloidu, ale v rovině $z = 0$,³ je zaznačena také integrační oblast, kterou je obdélník daný nerovnicemi $-1 \leq x \leq 1$ a $0 \leq y \leq 1$.

Nejhrubější odhad pomocí jednoho kvádrů je znázorněn na obrázku 9.5. Podstavou kvádrů je naše integrační oblast, jeho výškou největší hodnota $z = f(x, y)$, kterou zde funkce nabývá. Objem kvádrů je roven $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$.

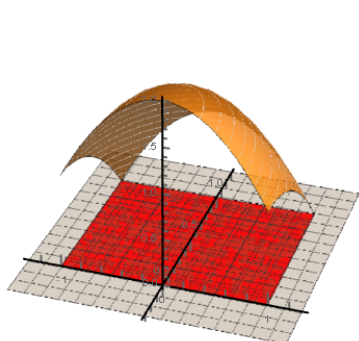
Přesnější odhady lze získat použitím vícera kvádrů a součtem jejich objemů, viz obrázek 9.6. Přesnou hodnotu dostaneme integrováním.

$$\iint_{\Omega} (2 - x^2 - y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^1 (2 - x^2 - y^2) dx dy$$

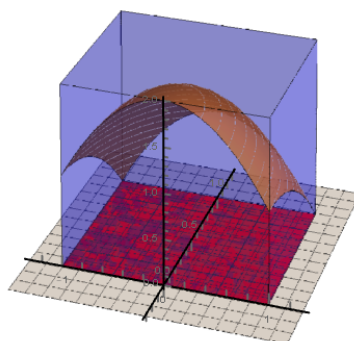
Z naznačeného obarvení je patrné, že máme dvě možnosti jak integrovat. Buď nejdříve podle y a poté podle x a nebo naopak nejdříve podle x a poté podle y .

²Zakreslení vrstevnic, bokorysu a nárysny je ponecháno laskavému čtenáři jako cvičení

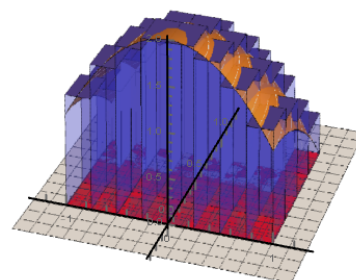
³v rovině definičního oboru



Obr. 9.4:
 $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$



Obr. 9.5:
 $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$
 „v kvádru“



Obr. 9.6:
 $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$
 „v krádrících“

Integrujme tedy, např. **podle y** a poté **podle x** .⁴ Ať tak či onak, obdobně jako u derivování funkce dvou proměnných, i zde při integrování platí, že integrujeme-li **podle x** chováme se k **y** jako ke konstantě. Tak, za použití vzorců ze strany 64, dostáváme:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) \, dy \, dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 2 \, dy - \int_0^1 x^2 \, dy - \int_0^1 y^2 \, dy \right) \, dx = \int_{-1}^1 \left[\left(2y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \right]_0^1 \, dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\left(2 \cdot 1 - x^2 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2 \cdot 0 - x^2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \right) \, dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{3} - x^2 \right) \, dx = \\ &= \left[\frac{5}{3}x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left(\left(\frac{5}{3} \cdot 1 - \frac{1^3}{3} \right) - \left(\frac{5}{3} \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Je hotovo, můžeme konstatovat, že objem „našeho“ tělesa je $\frac{8}{3}$.

V řešení příkladě 9.1 byl integrační oblastí obdélník, což integrování značně usnadňuje. Také integrování funkce $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ nevyžadovalo žádné speciální postupy.

V kapitole 12 si ukážeme postupy, jak obecnou oblast převést na oblast obdélníkovou, jejíž výhodou jsou jednak konstantní meze a jednak možnost dalšího zjednodušení výpočtu. A právě tuto možnost si demonstrováme v následujícím jednoduchém příkladu.

Zadání - 9.3:

Zintegrujte funkci $f(x, y) = xy^2$ na oblasti Ω , která je popsána nerovnicemi $1 \leq x \leq 2$ a $3 \leq y \leq 4$.

⁴Integrování podle **podle x** a poté **podle y** a ověření, že výsledek bude stejný, je ponecháno laskavému čtenáři jako cvičení.

Protože opravdu jde o jednoduchý příklad, integrační oblast je obdélníková⁵ a integrační meze známe, pustíme se přímo do integrování. Začneme integrovat nejdříve podle y .

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} xy^2 \, dx \, dy &= \int_1^2 \int_3^4 xy^2 \, dy \, dx = \int_1^2 x \cdot \left(\int_3^4 y^2 \, dy \right) dx = \int_1^2 x \cdot \left(\left[\frac{y^3}{3} \right]_3^4 \right) dx = \\ &= \int_1^2 \frac{37}{3} \cdot x \, dx = \frac{37}{3} \cdot \int_1^2 x \, dx = \frac{37}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{37}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{37}{2}.\end{aligned}$$

V prvním řádku jsme integrovali podle y a protože proměnná x se při takovém integrování chová jako konstanta a násobíme jí integrovanou funkci, vytkli jsme ji před integrál. Stejně jako v případě konstanty $\frac{37}{3}$ na druhém řádku.

Přestože již výsledek máme, zkusme integrovat ještě jednou, tentokrát nejprve podle x a poté podle y .

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} xy^2 \, dx \, dy &= \int_3^4 \int_1^2 xy^2 \, dx \, dy = \int_3^4 y^2 \cdot \left(\int_1^2 x \, dx \right) dy = \int_3^4 y^2 \cdot \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \right) dy = \\ &= \int_3^4 \frac{3}{2} \cdot y^2 \, dy = \frac{3}{2} \cdot \int_3^4 y^2 \, dy = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_3^4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{37}{3} = \frac{37}{2}.\end{aligned}$$

Opět můžeme konstatovat, že při integrování podle x se člen y^2 chová jako konstanta, protože na x nezávisí. Proto lze tuto „konstantu y^2 “ vytknout před integrál.

Projdeme-li si pozorně oba uvedené výpočty, zjistíme, že jsme mohli postupovat následovně

$$\iint_{\Omega} xy^2 \, dx \, dy = \int_1^2 \int_3^4 xy^2 \, dy \, dx = \int_1^2 x \, dx \cdot \int_3^4 y^2 \, dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_3^4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{37}{3} = \frac{37}{2}.$$

Na jednoduchém příkladě jsme si ukázali, že platí

Důležité:

Nechť je

- (i) integrovaná funkce: $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$,
- (ii) integrační oblast Ω : $x_d \leq x \leq x_h, y_d \leq y \leq y_h$,

pak

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{x_d}^{x_h} g(x) \, dx \cdot \int_{y_d}^{y_h} h(y) \, dy$$

Důležité je splnění obou podmínek!

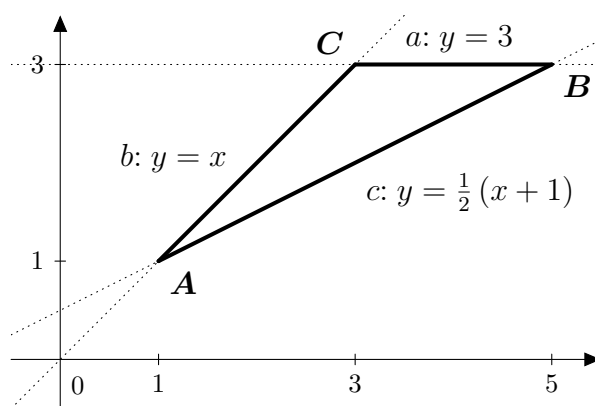
⁵čtvercová

V následujícím příkladě ukážeme, jak se může postup zkomplikovat, budeme-li uvažovat obecnou integrační oblast Ω . A to i když půjde „jen“ o trojúhelník. Připomeneme také substituční metodu.

Zadání - 9.4:

Zintegrujte $\iint_{\Omega} (y-x)^2 dx dy$. Oblast Ω je trojúhelník ΔABC s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [5, 3]$, $C = [3, 3]$.

Začneme nákresem a popisem oblasti Ω . Důležité je soustředit se především na popis stran trojúhelníku ΔABC . Je snadné si všimnout, že úsečka strany a je částí konstantní přímky $y = 3$. Podobně jednoduše určíme popis b , prochází body $[1, 1]$ a $[3, 3]$, takže jde o část přímky $x = y$. Nejvíce času zabere určení rovnice strany c , koeficienty k, q rovnice přímky $y = kx + q$ dostaneme ze soustavy dvou rovnic od dvou neznámých.⁶ Takto dostaneme popis strany c ve tvaru $y = \frac{1}{2}(x+1)$. Celá situace je na obrázku 9.7.



Obr. 9.7: ΔABC

Popis oblasti Ω , uvedený na obrázku 9.7, je však pro potřeby integrování nedostačující. Pro výpočet integrálu je třeba znát meze, v nichž se proměnné „pohybují“. V příkladech 9.1 a 9.1 byly meze konstantní, zde se meze mění.

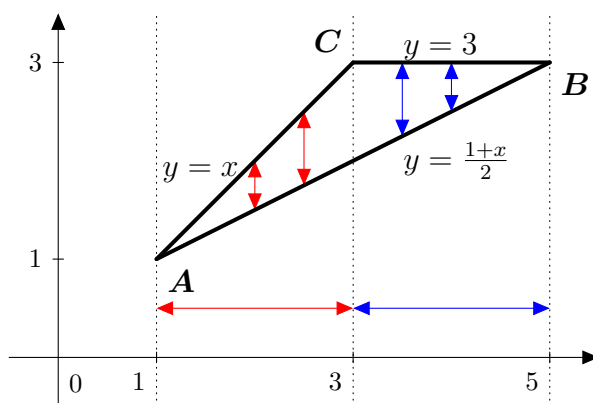
Budeme-li funkci $f(x, y)$ integrovat nejprve podle y , závisí tyto meze na x . Proto musíme popis hranice oblasti přepsat do tvaru rovnic $y = h(x)$. K určení mezí použijeme obrázku 9.8, kde je hranice již takto popsána.

Na obrázku 9.8 je také zvýrazněno, jak a proč se oblast Ω „rozpadá“ na dvě podoblasti. Její horní mez totiž není jednoznačná. Označme si podoblasti Ω_1 a Ω_2 a zapišme je soustavami nerovnic:

$$\Omega_1 : \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3, \\ \frac{1+x}{2} \leq y \leq x, \end{array} \quad \Omega_2 : \begin{array}{l} 3 \leq x \leq 5, \\ \frac{1+x}{2} \leq y \leq 3. \end{array}$$

Protože uvedené soustavy nejsou ničím jiným než zápisem integračních mezí, můžeme integrovat

⁶Do rovnice $y = kx + q$ dosadíte za x a y souřadnice bodů, jimiž přímka prochází.

Obr. 9.8: ΔABC - popis mezí pro y

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} (y-x)^2 dx dy &= \iint_{\Omega} (y^2 - 2yx + x^2) dx dy = \\
 &= \iint_{\Omega_1} (y^2 - 2yx + x^2) dx dy + \iint_{\Omega_2} (y^2 - 2yx + x^2) dx dy = \\
 &= \int_1^3 \left(\int_{\frac{1+x}{2}}^x (y^2 - 2yx + x^2) dy \right) dx + \int_3^5 \left(\int_{\frac{1+x}{2}}^3 (y^2 - 2yx + x^2) dy \right) dx = \\
 &= \int_1^3 \left[\frac{y^3}{3} - y^2x + yx^2 \right]_{\frac{1+x}{2}}^x dx + \int_3^5 \left[\frac{y^3}{3} - y^2x + yx^2 \right]_{\frac{1+x}{2}}^3 dx = \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{24} (7x^3 + 3x^2 - 3x + 1) \right) dx + \int_3^5 \left(9 - \frac{1}{24} (7x^3 + 3x^2 - 3x + 1) \right) dx = \\
 &= \frac{1}{24} \int_1^3 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) dx + \frac{1}{24} \int_3^5 (-7x^3 + 69x^2 - 213x + 215) dx = \\
 &= \frac{1}{24} \left(\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - x \right]_1^3 + \left[-\frac{7x^4}{4} + 23x^3 - \frac{213x^2}{2} + 215x \right]_3^5 \right) = \\
 &= \frac{1}{24} (4 + 28) = \frac{1}{24} \cdot 32 = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Byla to halda práce,⁷ ale je hotovo.

Popis oblasti Ω , resp. její „rozpad“ na červenou Ω_1 a modrou Ω_2 , nás dovedl k využití následující vlastnosti dvojného integrálu.

⁷A to jsou zde některé z mezivýpočtů přeskočeny a ponechány laskavému čtenáři k provedení

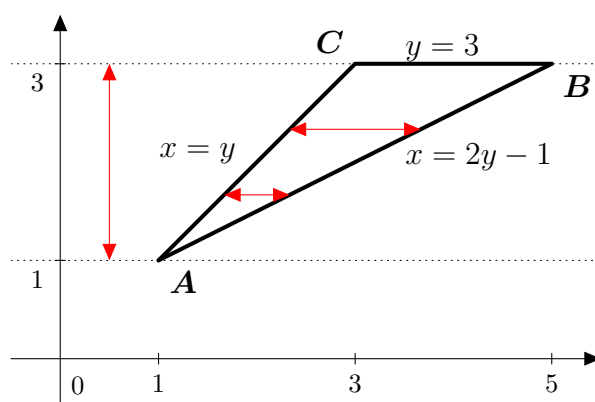
Důležité:

Je-li $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, pro disjunktní oblasti Ω_1, Ω_2 , pak

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Jako vždy vyvstává otázka, zda nebylo možné si práci alespoň trochu zjednodušit. Možnosti tu samozřejmě jsou.

První z nich je pokusit se popsat meze a také integrovat v „opačném gardu,“ tj. nejprve podle x a poté podle y . Za tím účelem si překreslíme obrázek 9.8, tak aby popis hranice oblasti odpovídal rovnicím tvaru $x = h(y)$. Tak získáme obrázek 9.9.



Obr. 9.9: ΔABC - popis mezí pro x

Z obrázku 9.9 je patrné, že v tomto případě nemusíme Ω dělit na podoblasti. Je to dáno tím, že dolní i horní mez pro x je jednoznačná. K popisu Ω tak stačí pouze jedna soustava nerovnic. Proto také budeme počítat pouze jeden integrál. Již v tom lze spatřit výhodu oproti předchozímu postupu.

$$\Omega : \begin{array}{l} 1 \leq y \leq 3, \\ y \leq x \leq 2y - 1. \end{array}$$

Druhou úsporou času a práce je volba „solistikovanějších“ integračních metod, a to využití *substituční metody*. Místo roznásobení členu $(x-y)^2$ nahradíme rozdíl $x-y$ novou proměnnou t . Kvůli tomu musíme přepočítat a nahradit i člen dx a také integrační meze. Vše je samozřejmě zaznačeno ve výpočtu.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (y-x)^2 \, dx \, dy &= \int_1^3 \left(\int_y^{2y-1} (y-x)^2 \, dx \right) dy = \\ \left| \begin{array}{lll} y-x & = & t \\ -dx & = & dt \\ y \leq x & \leq & 2y-1 \\ y \leq y-t & \leq & 2y-1 \\ 0 \geq t & \geq & 1-y \end{array} \right| &= \int_1^3 \left(\int_{1-y}^0 (-t^2) \, dt \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{-t^3}{3} \right]_{1-y}^0 dy = \frac{1}{3} \int_1^3 (1-y)^3 dy \end{aligned}$$

Abychom nemuseli roznásobovat závorku $(1-y)^3$ využijeme další substituce a nahradíme $(1-y)$ proměnnou s . Přitom opět přepočítáme člen dy a integrační meze.

$$\frac{1}{3} \int_1^3 (1-y)^3 dy = \left| \begin{array}{rclcl} 1-y & = & s \\ -dy & = & ds \\ 1 & \leq & y & \leq & 3 \\ 1 & \leq & 1-s & \leq & 3 \\ 0 & \geq & s & \geq & 2 \end{array} \right| = -\frac{1}{3} \int_2^0 s^3 ds = \frac{1}{3} \int_0^2 s^3 ds = \frac{1}{3} \left[\frac{s^4}{4} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Díky lépe zvolenému popisu jsme si vystačili s jedním integrálem, který substituce dále zpřehlednila. Poznamenejme ještě, že znaménko „mínus,“ které se při druhé substituci objevilo u členu ds , bylo v dalším kroku použito k obrácení mezí.

Jak je vidět popis oblasti, který si zvolíme, je pro náročnost dalších výpočtů do značné míry určující. Proto je třeba věnovat mu pozornost a správně si integrační oblast zakreslit.

Důležité:

V souvislosti s popisem oblasti rozlišujeme

Oblast I. typu normální vzhledem k ose x ,

je ohraničena přímkami $x = a$, $x = b$ a spojitými funkcemi $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ takovými, že $g_1(x) < g_2(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$.

Oblast II. typu normální vzhledem k ose y ,

je ohraničena přímkami $y = c$, $y = d$ a spojitými funkcemi $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$ takovými, že $h_1(y) < h_2(y)$ pro $y \in \langle c, d \rangle$.

9.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:

Oblast Ω zakreslete a popište jako oblast typu I a jako oblast typu II. V případě potřeby použijte sjednocení více oblastí.

(9.1) Ω : čtyřúhelník s vrcholy $A = [3, 2]$ $B = [4, 2]$, $C = [4, 4]$ a $D = [3, 5]$.

(9.2) Ω : čtyřúhelník s vrcholy $A = [1, 0]$ $B = [0, 1]$, $C = [-1, 0]$ a $D = [0, -2]$.

(9.3) Ω : ohraničena $x = y^2$, $x = 0$ a $y = -1$.

(9.4) Ω : ohraničena $y = 1 - x^2$, a $y = 1 - x$.

(9.5) Ω : trojúhelník s vrcholy $A = [1, 1]$ $B = [2, 2]$ a $C = [-3, 3]$.

(9.6) Ω : ohraničena $x - 3 = 0$, $x - y + 2 = 0$, a $x + 3y - 6 = 0$.

Úloha:



Pro funkce $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ a oblasti Ω_1, Ω_2 rozhodněte, zda lze dvojný integrál spočítat jako součin dvou integrálů. Integrály spočtěte.

$$\iint_{\Omega_1} f_1(x, y) \, dx \, dy, \quad \iint_{\Omega_1} f_2(x, y) \, dx \, dy, \quad \iint_{\Omega_2} f_1(x, y) \, dx \, dy, \quad \iint_{\Omega_2} f_2(x, y) \, dx \, dy.$$

$$f_1 = x^2 y, \quad f_2 = x^2 - y,$$

$$(9.7) \quad \Omega_1 : \triangle ABC, \quad \Omega_2 : \square ABCD,$$

$$\text{pro body } A = [1, 1], B = [2, 1], C = [2, 3], D = [1, 3].$$

$$f_1 = \frac{x}{y}, \quad f_2 = x - y,$$

$$(9.8) \quad \Omega_1 : \triangle ABC, \quad \Omega_2 : \square ABCD,$$

$$\text{pro body } A = [1, 1], B = [e, 1], C = [e, e], D = [1, e].$$

$$f_1 = (x - 3)^2 + \sqrt{1 - y}, \quad f_2 = (x - 3)^2 \sqrt{1 - y},$$

$$(9.9) \quad \Omega_1 : \triangle ABC, \quad \Omega_2 : \square ABCD,$$

$$\text{pro body } A = [0, 0], B = [3, 0], C = [3, 1], D = [0, 1].$$

Úloha:



Zintegrujte na oblasti Ω , oblast zakreslete.

$$(9.10) \quad \iint_{\Omega} (7 - x^2 - 2y) \, dx \, dy, \quad \Omega : \text{ohraničena } y = 2x \text{ a } y = 3 - x^2.$$

$$(9.11) \quad \iint_{\Omega} (1 - y^2) \, dx \, dy, \quad \Omega : \triangle ABC : A = [1, 1], B = [3, 1], C = [3, 2].$$

$$(9.12) \quad \iint_{\Omega} xy \, dx \, dy, \quad \Omega : \text{ohraničena } y = 2 - x^2 \text{ a } y = x^2.$$

$$(9.13) \quad \iint_{\Omega} (1 - xy) \, dx \, dy, \quad \Omega : \text{ohraničena } x = 0, y = 2 \text{ a } y = \sqrt{x}.$$

$$(9.14) \quad \iint_{\Omega} (x - 1) \, dx \, dy, \quad \Omega : \text{ohraničena } y = x, y = x^3, \text{ v I. kvadrantu.}$$

$$(9.15) \quad \iint_{\Omega} \sqrt{x} \, dx \, dy, \quad \Omega : \square ABCD : A = [0, 0], B = [1, 1], C = [1, 3], D = [0, 1].$$

$$(9.16) \quad \iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \, dx \, dy, \quad \Omega : \text{ohraničena } y = x^2, y = 5x - 4.$$

$$(9.17) \quad \iint_{\Omega} (1 + xy) \, dx \, dy, \quad \Omega : \text{ohraničena } x = y^2, x = 0, y = -1.$$

$$(9.18) \quad \iint_{\Omega} xy \, dx \, dy, \quad \Omega : \text{ohraničena } y = x^2 + 1, y = x + 1.$$

$$(9.19) \quad \iint_{\Omega} \frac{y}{x+1} \, dx \, dy, \quad \Omega : \text{dána podmínkou } 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Výsledek úlohy: _____



Oblast Ω zakreslete a popište jako oblast typu I a jako oblast typu II. V případě potřeby použijte sjednocení více oblastí.

$$\begin{aligned}
 (9.1) \quad & \Omega_I : 3 \leq x \leq 4 \wedge 2 \leq y \leq 8 - x, \\
 & \Omega_{II} : (2 \leq y \leq 4 \wedge 3 \leq x \leq 5) \vee (4 \leq y \leq 5 \wedge 3 \leq x \leq 8 - y), \\
 (9.2) \quad & \Omega_I : (-1 \leq x \leq 0 \wedge -2(x+1) \leq y \leq x+1) \vee (0 \leq x \leq 1 \wedge -2(1-x) \leq y \leq 1-x), \\
 & \Omega_{II} : (-1 \leq y \leq 0 \wedge -\frac{1}{2}(y+2) \leq x \leq \frac{1}{2}(y+2)) \vee (0 \leq y \leq 1 \wedge y-1 \leq x \leq 1-y), \\
 (9.3) \quad & \Omega_I : 0 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq -\sqrt{x}, \\
 & \Omega_{II} : -1 \leq y \leq 0 \wedge 0 \leq x \leq y^2, \\
 (9.4) \quad & \Omega_I : 0 \leq x \leq 1 \wedge 1-x \leq y \leq 1-x^2, \\
 & \Omega_{II} : 0 \leq y \leq 1 \wedge 1-y \leq x \leq \sqrt{1-y}, \\
 (9.5) \quad & \Omega_I : \left(-3 \leq x \leq 1 \wedge \frac{1}{2}(3-x) \leq y \leq \frac{1}{5}(12-x)\right) \vee \left(1 \leq x \leq 2 \wedge x \leq y \leq \frac{1}{5}(12-x)\right), \\
 & \Omega_{II} : (1 \leq y \leq 2 \wedge 3-2y \leq x \leq y) \vee (2 \leq y \leq 3 \wedge 3-2y \leq x \leq 12-5y), \\
 (9.6) \quad & \Omega_I : 0 \leq x \leq 3 \wedge 2 - \frac{x}{3} \leq y \leq x+2, \\
 & \Omega_{II} : (1 \leq y \leq 2 \wedge 6-3y \leq x \leq 3) \vee (2 \leq y \leq 5 \wedge y-2 \leq x \leq 3),
 \end{aligned}$$

Výsledek úlohy: _____



Pro funkce $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ a oblasti Ω_1, Ω_2 rozhodněte, zda lze dvojný integrál spočítat jako součin dvou integrálů. Integrály spočtěte.

$$\begin{aligned}
 (9.7) \quad & \iint_{\Omega_1} f_1(x, y) \, dx \, dy = \frac{49}{10}, \iint_{\Omega_1} f_2(x, y) \, dx \, dy = \frac{7}{6}, \\
 & \iint_{\Omega_2} f_1(x, y) \, dx \, dy = \frac{28}{3}, \text{ANO}, \iint_{\Omega_2} f_2(x, y) \, dx \, dy = \frac{2}{3}, \\
 (9.8) \quad & \iint_{\Omega_1} f_1(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{4}(1 + e^2), \iint_{\Omega_1} f_2(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{6}(e-1)^3, \\
 & \iint_{\Omega_2} f_1(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{4}(e^2 - 1), \text{ANO}, \iint_{\Omega_2} f_2(x, y) \, dx \, dy = 0. \\
 (9.9) \quad & \iint_{\Omega_1} f_1(x, y) \, dx \, dy = \frac{77}{20}, \iint_{\Omega_1} f_2(x, y) \, dx \, dy = \frac{64}{35}, \\
 & \iint_{\Omega_2} f_1(x, y) \, dx \, dy = 13, \iint_{\Omega_2} f_2(x, y) \, dx \, dy = 12, \text{ANO}.
 \end{aligned}$$

Výsledek úlohy:



Zintegrujte na oblasti Ω , oblast zakreslete.

$$(9.10) \quad 64,$$

$$(9.13) \quad -\frac{8}{3},$$

$$(9.15) \quad \frac{16}{15},$$

$$(9.17) \quad \frac{1}{4},$$

$$(9.11) \quad -\frac{5}{6},$$

$$(9.14) \quad -\frac{7}{60},$$

$$(9.16) \quad \frac{4}{3},$$

$$(9.18) \quad \frac{1}{8},$$

$$(9.12) \quad 0,$$

$$(9.19) \quad \frac{1}{4}.$$

Kapitola 10

Objem

Cíl:



Cílem této spíše ilustrativní kapitoly je

Čas:



Kapitola je kratší a nezabere více než 2 hodiny.

Předpoklady:



Využijeme nejen integrační vzorce a metody, ale také poznatky analytické geometrie. A především hojně prostorovou představivost.

Budete umět:



- Popsat těleso vymezené prostorovými plochami
- Spočítat objem tělesa

Když jsme se v kapitole 9 seznamovali s dvojným integrálem, pomáhali jsme si geometrickou představou výpočtu objemu tělesa, jde totiž o jednu nejpřístupnějších aplikací. Ovšem těleso, jehož objem hledáme, nemusí být popsáno takto jednoduše. Častější je zadání ve formě rovnic trojrozměrných ploch, které těleso ohraničují. Před samotným výpočtem je tedy nutné udělat si celé situaci představu, pokusit se o náčrtek a z něj určit integrační oblast a integrované funkce. To vše je ukázáno v následujícím řešení příkladě.

10.1 Řešená úloha

Zadání - 10.1:



Vypočítejte objem tělesa ohraničeného zadanými plochami.

$$z = 23 - xy, \quad y = x^2, \quad y = 8 - x^2, \quad x - 2y + z - 2 = 0.$$

Začneme rovnicemi $y = x^2$, a $y = 8 - x^2$, které sice představují trojrozměrnou plochu, ovšem nejde o graf funkce žádné $f(x, y)$ dvou proměnných. Zakreslíme-li si je do roviny xy , tj. $z = 0$, dostaneme obrázek 10.2. Vyřešením rovnice $x^2 = 8 - x^2$ najdeme jejich průsečíky.

Uvědomíme-li si, že do roviny xy zakreslujeme definiční obor funkcí dvou proměnných, zjistíme, že máme zakreslenou integrační oblast Ω . „popis oblasti je ponechám laskavému čtenáři k procvičení“

Rovnice $x - 2y + z - 2 = 0$ je obecnou rovnicí roviny a rovnice $z = 23 - xy$ představuje trojrozměrnou plochu. Vyjádříme i první z nich ve tvaru funkce x, y , tedy $z = 2 - x + 2y$. Takto máme dvě funkce $h(x, y) = 23 - xy$ a $d(x, y) = 2 - x + 2y$ nad obecnou integrační oblastí Ω . A s úlohou určení „objemu tělesa pod grafem“ jsme se již setkali v kapitole 9. Nyní chceme určit „objem tělesa mezi grafy“, k tomu ovšem stačí spočítat oba „objemy pod“ a odečíst je.

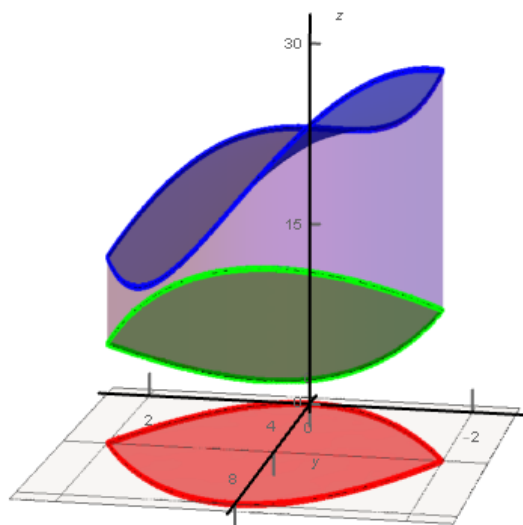
Abychom nedostali záporný výsledek, je třeba odečítat menší objem od většího. Dosaďme si tedy například bod $\mathbf{A} = [0, 4]$, dostaneme hodnoty do funkcí $h(0, 4) = 23$ a $d(0, 4) = 10$, z nichž můžeme usuzovat, že $d(x, y) < h(x, y)$.¹

Náčrtek tělesa je na obrázku 10.1, přičemž „horní“ funkce $h(x, y)$ je modrá, „dolní“ funkce $d(x, y)$ a červeně je zakreslena integrační oblast Ω . „Stěny“ tělesa jsou tvořeny válcovými plochami s řídicími křivkami $y = x^2$ a $y = 8 - x^2$.

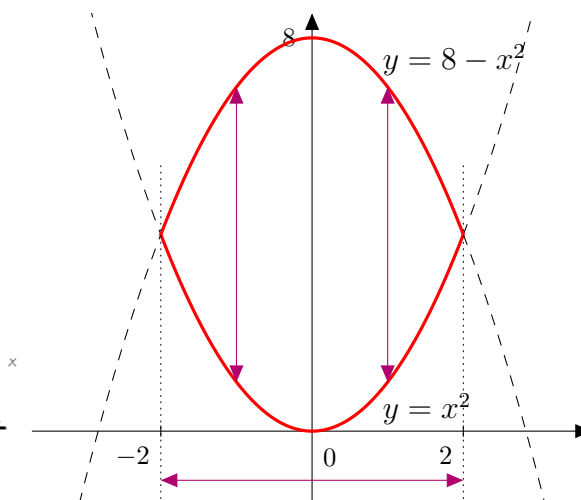
Po tomto rozboru se již můžeme pustit do výpočtu objemů V_h „pod horní funkcí“ $h(x, y) = 23 - xy$ a V_d „pod dolní“ funkcí $d(x, y) = 2 - x + 2y$. V prvním případě počítáme dvojný integrál:

$$\begin{aligned} V_h &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{8-x^2} (23 - xy) \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \left[23y - \frac{xy^2}{2} \right]_{x^2}^{8-x^2} dx = \\ &= \int_{-2}^2 \left[\left(-\frac{x^5}{2} + 8x^3 - 23x^2 - 32x + 184 \right) - \left(23x^2 - \frac{x^5}{2} \right) \right] dx = \\ &= \int_{-2}^2 (184 - 32x - 46x^2 + 8x^3) \, dx = \left[2x^4 - \frac{46x^3}{3} - 16x^2 + 184x \right]_{-2}^2 = \\ &= \frac{640}{3} - \left(-\frac{832}{3} \right) = \frac{1472}{3}. \end{aligned}$$

¹správně bychom měli platnost vztahu ověřit pro celou oblast Ω



Obr. 10.1: Náčrtek tělesa



Obr. 10.2: Integrační oblast a meze

Poznámka:

Z vlastností integrálů a funkcí jedné proměnné víme, že výsledkem integrálu *liché* funkce na souměrném intervalu $\langle -a, a \rangle$ je nula. Obdobně pro *sudou* funkci na souměrném intervalu $\langle -a, a \rangle$, stačí integrovat od 0 do a a výsledek vynásobit dvěma. Zde jsme tedy mohli členy $-32x$ a $8x^3$ z integrování vynechat, neboť to jsou *liché* funkce a členy 184 a $-46x^2$, integrovat pouze na $\langle 0, 2 \rangle$ a výsledek zdvojnásobit.

Obdobně určíme objem V_d i pro funkci $d(x, y)$:

$$\begin{aligned} V_d &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{8-x^2} (2-x+2y) \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \left[2y - xy + y^2 \right]_{x^2}^{8-x^2} dx = \\ &= \int_{-2}^2 \left[(2(8-x^2) - x(8-x^2) + (8-x^2)^2) - (2x^2 - 2x^3 + x^4) \right] dx = \\ &= \int_{-2}^2 (80 - 8x - 20x^2 + 3x^3) \, dx = 2 \cdot 20 \int_0^2 (4 - x^2) \, dx = 40 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= 40 \left(\left(8 - \frac{8}{3} \right) - (0 - 0) \right) = \frac{640}{3}. \end{aligned}$$

V duchu předchozí poznámky jsme využili vlastností *sudé* a *liché* funkce. Červěně označené členy jsme vypustili a modře označené sudé členy integrujeme od 0 do 2 a výsledek zdvojnásobili.

Objem tělesa ohraničeného zadanými křivkami je roven rozdílu $V_h - V_d$, tj.

$$V = V_h - V_d = \frac{1472}{3} - \frac{640}{3} = \frac{832}{3}.$$

Využijeme-li vlastností integrálů popsaných na straně ??, pak můžeme celý postup zapsat následovně

$$V = V_h - V_d = \iint_{\Omega} h(x, y) \, dx \, dy - \iint_{\Omega} d(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega} (h(x, y) - d(x, y)) \, dx \, dy.$$

Z uvedeného je vidět, že máme dvě možnosti, jak postupovat. Spočítat každý z integrálů zvlášť, určit objemy obou těles V_h, V_d a pak odečíst $V_h - V_d$, nebo integrovat jen jednou rozdíl funkcí $h(x, y) - d(x, y)$. Který z postupů je výhodnější, záleží konkrétní situaci a požadovaných výstupech.

Na závěr ještě naznačme postup s integrálem rozdílu,

$$\begin{aligned} V = V_h - V_d &= \iint_{\Omega} (h(x, y) - d(x, y)) \, dx \, dy = \\ &= \iint_{\Omega} ((23 - xy) - (2 - x + 2y)) \, dx \, dy = \iint_{\Omega} (21 + x - 2y - xy) \, dx \, dy = \dots^2 \end{aligned}$$

10.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:



Vypočítejte objem tělesa ohraničeného danými plochami.

$$(10.1) \quad x - y + z = 6, \quad x + y = 2, \quad x = y, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$(10.2) \quad z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$(10.3) \quad x + y + z = 4, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

$$(10.4) \quad y = 0, \quad x + y = 0, \quad x + 2y = 1, \quad z = 0, \quad z = y^2.$$

Výsledek úlohy:



Vypočítejte objem tělesa ohraničeného danými plochami.

$$(10.1) \quad V = \frac{16}{3},$$

$$(10.2) \quad V = \frac{1}{6},$$

$$(10.3) \quad V = \frac{68}{15},$$

$$(10.4) \quad V = \frac{1}{12},$$

²výpočet ponechán jako cvičení laskavému čtenáři

Kapitola 11

Těžiště

Cíl:



Možnosti využití dvojného integrálu nespočívají pouze ve výpočtech objemu těles. Aplikací je mnohem více. V této kapitole se seznámíme s další z nich. Budeme vyšetřovat *hmotné rovinné těleso*, určíme jeho *hmotnost* m , *statické momenty* S_x, S_y a nalezneme jeho těžiště.

Čas:



Kapitola využívá dříve popsaných metod, proto k jejímu prostudování postačí 2 hodiny.

Předpoklady:



Všechny vytyčené cíle budou dosaženy pomocí dvojných integrálů. Potřebujeme proto znát základní integrační vzorce a metody. K popisu a nákresu oblastí je nutné znát rovnice přímek, křivek či grafy funkcí.

Budete umět:



- Spočítat *hmotnost* m , *statické momenty* S_x, S_y .
- Nalézt těžiště.

11.1 Řešená úloha

Zadání - 11.1:



Určete souřadnice těžiště rovinného tělesa Ω s hustotou $\sigma(x, y) = 1$, ohraničeného křivkami

$$y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad \text{pro } x \geq 0.$$

Z matematického hlediska nepůjde opět o nic jiného než o výpočet dvojného integrálu. Jen konečný výsledek bude zasazen do jiného rámce a podle něj interpretován. Integrační oblast Ω budeme považovat za *hmotné rovinné těleso* a integrovanou funkci $\sigma(x, y)$ jako hustotu materiálu a výsledkem integrování budeme chápat jako hmotnost tělesa Ω .

Předpoklad zadání, že pro hustotu platí $\sigma(x, y) = 1$, značí, že těleso je *homogenní*.

Kromě hmotnosti m budeme k určení souřadnic těžiště potřebovat ještě statické momenty S_x a S_y . A i ty se spočítají pomocí dvojných integrálů.

Důležité:

Nechť funkce $\sigma(x, y)$ popisuje hustotu rovinného tělesa Ω , pak se jeho těžiště $\mathbf{T}$ nachází v bodě

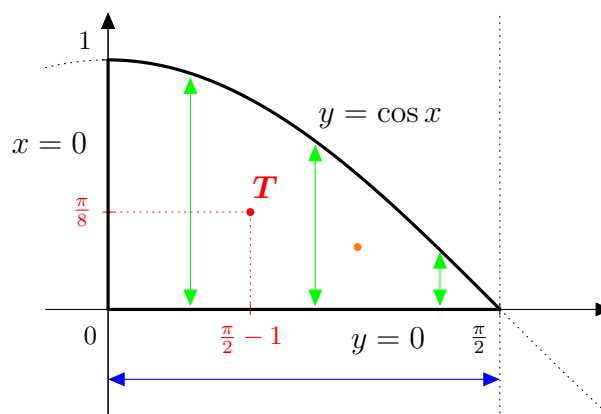
$$\mathbf{T} = \left[\frac{S_x}{m}, \frac{S_y}{m} \right],$$

kde m je hmotnost tělesa a S_x a S_y jeho statické momenty určené jako

$$m = \iint_{\Omega} \sigma(x, y) \, dx \, dy, \quad S_x = \iint_{\Omega} x \sigma(x, y) \, dx \, dy, \quad S_y = \iint_{\Omega} y \sigma(x, y) \, dx \, dy.$$

Když máme vzorce, máme vše. Stačí zakreslit integrační oblast Ω a počítat. Z nákresu na obrázku 11.1 je vidět, že oblast lze popsat soustavou nerovnic. **Modrá šipka** naznačuje meze pro x a **zelené** pro y .

$$\Omega : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq y \leq \cos x. \end{array}$$



Obr. 11.1: Oblast Ω a její těžiště

Můžeme začít integrovat, nejprve určíme hmotnost.

$$m = \iint_{\Omega} \sigma(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} 1 \, dy \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y]_0^{\cos x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Dále spočteme statické momenty. Nejdříve S_x

$$S_x = \iint_{\Omega} x \sigma(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} x \, dy \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [xy]_0^{\cos x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

V případě výpočtu S_x jsme využili integraci pomocí metody *per partes*.

Důležité:

Integrační metoda *per partes* je (převážně) určená k integraci součinu dvou funkcí. Vychází ze vzorce pro derivaci součinu, tj. $(uv)' = u'v + uv'$. Pro integrál platí

$$\int u v' = uv - \int u'v.^1$$

V případě výpočtu S_y nám pomůže vztah $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ a drobná substituce

$$S_y = \iint_{\Omega} y \sigma(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} y \, dy \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\cos x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2x) \, dx = \left| \begin{array}{lll} 2x = t & & \\ 2 \, dx = dt & & \\ dx = \frac{dt}{2} & & \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} & \Rightarrow & 0 \leq t \leq \pi \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \frac{1}{8} [t + \sin t]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}.$$

Souřadnice těžiště tedy jsou

$$\mathbf{T} = \left[\frac{S_x}{m}, \frac{S_y}{m} \right] = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8} \right].$$

Jeho poloha je na obrázku 11.1 **označena červeně**. Z nákresu také můžeme „intuitivně“ odhadnout, že $\mathbf{T}$ by měl být v oblasti „spíše níže a spíše vlevo“. Jde o opravdu „hrubý“ odhad, avšak i takový lze využít k odhalení případné chyby. Například těžiště **v oranžovém bodě** $\left[1, \frac{1}{4}\right]$ by působilo podezřele.

Ovšem pozor, tento odhad jsme si mohli dovolit díky homogenitě rovinného tělesa Ω , v případě nekonzstantní hustoty $\sigma(x, y)$ se na takovou intuitivní představu spolehnout nelze.

¹Část je zintegrována, část na integrování čeká. Odtud plyne název *per partes* neboli *po částech*.

Na úplný závěr si můžeme oblast vystříhnout z papíru, spustit těžnice z vrcholů a ověřit si tak, že protnou právě v bodě T .

Poznámka:



Přestože jsme v příkladě 11.1 integrál

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$$

interpretovali jako hmotnost, stačí změnit úhel pohledu a můžeme prohlásit tento integrál a jeho výsledek za velikost plochy Ω .

Zadání - 11.2:



Odvoďte tvrzení předchozí poznámky.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že Ω je oblast typu I, viz strana 71, a integrujme

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 \, dy \, dx = \int_a^b [y]_{g_1(x)}^{g_2(x)} \, dx = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) \, dx.$$

A to je, jak víme z teorie integrálního počtu funkce jedné proměnné, velikost plochy mezi $g_1(x)$ a $g_2(x)$.

Poznámka:



Nechceme-li^a vzpomínat na teorii integrálního počtu funkce jedné proměnné, vzpomeňme na kapitolu 9 a kapitolu ?? a určíme obsah Ω s jejich pomocí. Objem tělesa pod grafem spočteme integrálem. Přitom „výška“ tělesa je dána funkční hodnotou $f(x, y)$ a oblast Ω je jeho „podstavou“.

Je-li funkční hodnota je konstantní a rovna jedné, je konstantní a rovna jedné i výška. Objem spočteme jako součin obsahu podstavy a výšky. Objem je výsledek integrálu a výška je rovna jedné. Ergo výsledek integrálu je roven obsahu podstavy, což je velikost plochy Ω .^b

^anebo nemůžeme-li

^bjde o číselnou hodnotu, neuvažujeme zde jednotky (krychlové vs. čtvereční)

Výpočty samotné se nijak nezměnili, změnil se jen úhel pohledu, použil nový nebo jiný vzoreček, ale stále jde o dvojný integrál a jeho aplikace. Uvedme některé z nich:

Důležité:



Nechť Ω značí rovinnou oblast či rovinné těleso a $\sigma(x, y)$ hustotu. Dvojný integrál lze použít k výpočtu

$S(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$ - obsah Ω ,

$V(\Omega) = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy$ - objem kolmého válce nad Ω omezeného shora
plochou $z = f(x, y)$,

$P(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \, dx \, dy$ - plošný obsah části
plochy $z = f(x, y)$ nad Ω

$m(\Omega) = \iint_{\Omega} \sigma(x, y) \, dx \, dy$ - hmotnost Ω ,

$S_x(\Omega) = \iint_{\Omega} x\sigma(x, y) \, dx \, dy$

$S_y(\Omega) = \iint_{\Omega} y\sigma(x, y) \, dx \, dy$ - statické momenty Ω ,

$T = \left[\frac{S_x}{m}, \frac{S_y}{m} \right]$ - těžiště Ω ,

$I_x(\Omega) = \iint_{\Omega} x^2 \sigma(x, y) \, dx \, dy$,

$I_y(\Omega) = \iint_{\Omega} y^2 \sigma(x, y) \, dx \, dy$

$I_z(\Omega) = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \sigma(x, y) \, dx \, dy$ - momenty setrvačnosti Ω .

Důležité:

Záleží jen na úhlu pohledu. Integrál, nejen dvojný a nejen integrál, ale celá

matematika je dobrý sluha, ale zlý pán.

Nechte ji, ať Vám slouží.

11.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:

Určete souřadnice těžiště rovinné oblasti Ω s hustotou $\sigma(x, y) = 1$, ohraničené křivkami. Oblast zakreslete.

$$(11.1) \quad y = x, \quad y = x^2.$$

$$(11.2) \quad x + y = 2, \quad y = x^2.$$

$$(11.3) \quad x = 4, \quad y = 0, \quad y = x^2.$$

$$(11.4) \quad y = 1 - x^2, \quad y = (x - 1)^2.$$

$$(11.5) \quad y^2 = x, \quad y + x = 2.$$

$$(11.7) \quad x^2 + 4 = y, \quad y = 4 - x.$$

$$(11.6) \quad y^2 - y = x, \quad y = 1 - x.$$

$$(11.8) \quad y = 1 - x^2, \quad y = 1 - x$$

Výsledek úlohy: _____



Určete souřadnice těžiště rovinné oblasti Ω s hustotou $\sigma(x, y) = 1$, ohraničené křivkami. Oblast zakreslete.

$$(11.1) \quad \mathbf{T} = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right],$$

$$(11.3) \quad \mathbf{T} = \left[3, \frac{24}{5} \right],$$

$$(11.5) \quad \mathbf{T} = \left[\frac{8}{2}, -\frac{1}{2} \right],$$

$$(11.7) \quad \mathbf{T} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{22}{5} \right],$$

$$(11.2) \quad \mathbf{T} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{8}{5} \right],$$

$$(11.4) \quad \mathbf{T} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

$$(11.6) \quad \mathbf{T} = \left[\frac{3}{5}, 0 \right],$$

$$(11.8) \quad \mathbf{T} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5} \right],$$

Kapitola 12

Substituce ve dvojném integrálu

Cíl:



V kapitole zopakujeme substituční metodu integrace a rozšíříme její použití na funkce dvou proměnných. Především zavedeme a předvedeme transformaci do polárních souřadnic.

Čas:



Kapitola zabere 4 hodiny.

Předpoklady:



V kapitole využijeme znalost základních integračních vzorců a substituční metody pro integrál funkce jedné proměnné.

Budete umět:



- Integrovat pomocí substituční metody
- Používat transformaci dvojrozměrného integrálu do *polárních* souřadnic

Substituční metoda patří spolu s metodou *par partes* k základním postupům integrování. Samotný název - *substituce*, (nahrazení, výměna) - napovídá, v čem tato metoda spočívá. Nelze samozřejmě složky integrované funkce nahrazovat dle libosti jinými. Pro správné použití je potřeba se na integrovanou funkci podívat „optikou“ derivace složené funkce.

Důležité:



Jestliže známe $\int f(x) = F(x) + c$, pak integrál $\int f(g(x))g'(x) dx$ můžeme spočítat *substituční metodou*

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{array} \right| = \int f(t) dt = F(t) + c = F(g(x)) + c.$$

12.1 Řešené úlohy

Přestože jsme již několik „drobných“ substitucí v předchozích řešených příkladech potkali, procvičme substituci i v následujícím příkladě.

Zadání - 12.1:



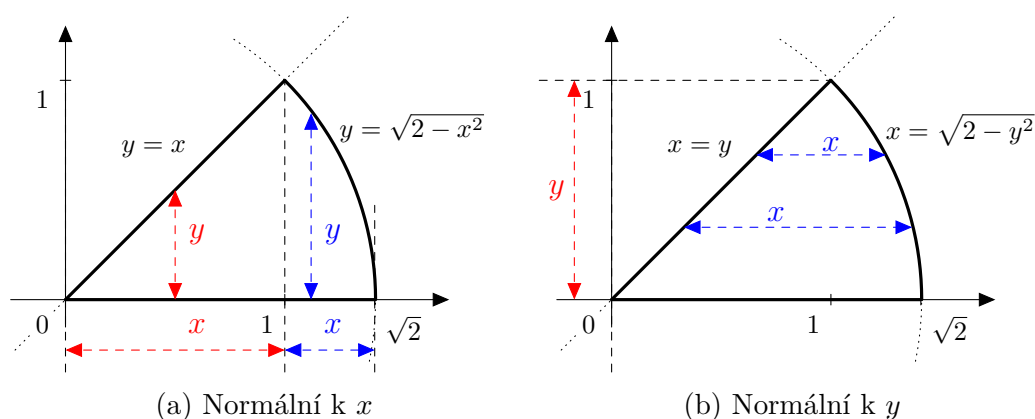
Určete souřadnice těžiště rovinného tělesa Ω s hustotou $\sigma(x, y) = 1$, ohraničeného křivkami $y = 0, y = x$ a $x^2 + y^2 = 2$.

Souřadnice těžiště jsme již počítali v kapitole 11. Víme tak, že musíme určit hmotnost a statické momenty rovinného tělesa. Budeme tedy integrovat a k tomu musíme znát integrační meze, proto začneme obrázkem 12.1.

Rovnice $y = 0$ popisuje osu x , rovnice $y = x$ osu I . kvadrantu a $x^2 + y^2 = 2$ je rovnicí kružnice se středem v počátku a poloměru $\sqrt{2}$.

Z nákresu 12.1a vidíme, že budeme-li chtít popsat Ω jako o integrační oblast I. typu, *normální vzhledem k ose x* , budeme muset Ω rozdělit na dvě podoblasti Ω_1 a Ω_2 a v každé z nich integrovat zvlášť.¹

Naproti tomu obrázek 12.1b ukazuje, že při popisu jako oblasti II. typu, *normální k ose y* se rozdělení vyhneme. A k integrování proto použijeme tento popis a integrační meze z něj plynoucí.²



Obr. 12.1: Oblast Ω

Začneme výpočtem hmotnosti. Protože jde o homogenní oblast, platí:

$$m = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \frac{1}{8} \pi (\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Jak je vidět, zde jsme se obešli bez integrování, protože výsledek se rovná velikosti plochy Ω . A to je v tomto případě $\frac{1}{8}$ obsahu kruhu, tj. $\frac{1}{8} \pi r^2$.

¹vyjádření mezí ponecháno laskavému čtenáři jako cvičení

²vyjádření mezí ponecháno laskavému čtenáři jako cvičení

Bohužel u statických momentů si takto pomoci nemůžeme a musíme integrovat

$$\begin{aligned} S_x &= \iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} x \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^{\sqrt{2-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 ((2-y^2) - y^2) dy = \\ &= \int_0^1 (1-y^2) dy = \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = (1 - \frac{1}{3}) - (0 - 0) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Zbývá určit statický moment S_y , tj.

$$\begin{aligned} S_y &= \iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} y \, dx \, dy = \int_0^1 [yx]_y^{\sqrt{2-y^2}} dy = \\ &= \int_0^1 (y\sqrt{2-y^2} - y^2) dy = \int_0^1 y\sqrt{2-y^2} dy - \int_0^1 y^2 dy \end{aligned}$$

Integrál jsme rozdělili na dva kusy. Jeden je jednoduchý a s prvním nám pomůže substituce.

$$\int_0^1 y\sqrt{2-y^2} dy = \left| \begin{array}{rcl} t & = & \sqrt{2-y^2} \\ t^2 & = & 2-y^2 \\ 2t \, dt & = & -2y \, dy \\ -\frac{t}{y} \, dt & = & dy \\ y=0 & \rightarrow & t = \sqrt{2-0^2} = \sqrt{2} \\ y=1 & \rightarrow & t = \sqrt{2-1^2} = 1 \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}}^1 \left(yt \left(-\frac{t}{y} \right) \right) dt$$

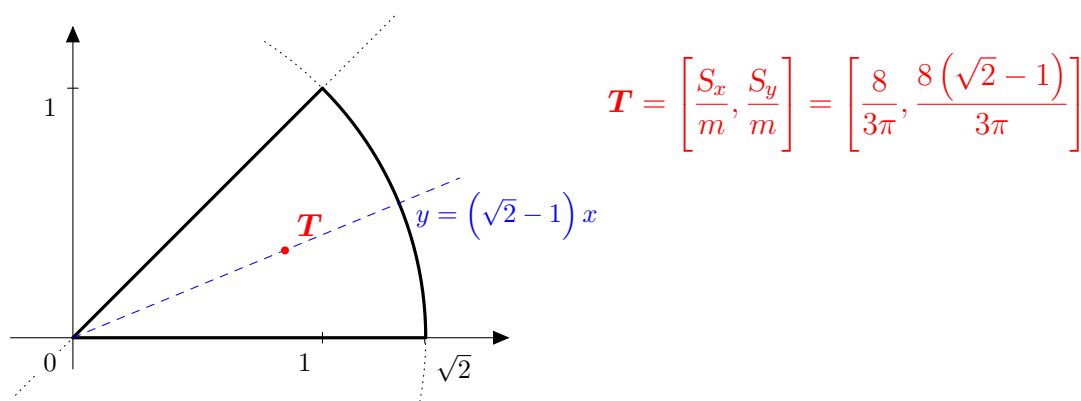
Nahrazujeme člen $2-y^2$ ve složené funkci, protože v integrálu vidíme i y , což je „část“ jeho derivace. Vyjádřili jsme si vztah pro dy a dt a také přepočítali meze. Než se však pustíme do dalšího integrování, musíme se definitivně rozloučit s proměnnou y , v integrále musí figurovat pouze nová proměnná t . K opuštění y stačí pouze zkrátit. Před pokračováním ještě využijme znaménko „-“ k prohození mezí, tak aby horní mez nebyla menší než mez dolní.

$$\int_0^1 y\sqrt{2-y^2} dy = - \int_{\sqrt{2}}^1 t^2 dt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$$

Jak je vidět substitucí a několika jednoduchými úpravami jsme získali opravdu jednoduchý integrál. Jehož výsledek můžeme dosadit zpět do výpočtu S_y a získat:

$$\begin{aligned} S_y &= \iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \int_0^1 y\sqrt{2-y^2} dy - \int_0^1 y^2 dy = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt - \int_0^1 y^2 dy = \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left(((\sqrt{2})^3 - 1^3) - (1^3 - 0^3) \right) = \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Protože známe hmotnost m i statické momenty S_x, S_y můžeme zapsat souřadnice těžiště Ω a zakreslit jej do obrázku 12.2.

Obr. 12.2: Těžiště oblasti Ω **Poznámka:**

Na obrázku 12.2 je zakreslena také osa oblasti Ω , na které³ těžiště leží. Stačilo nám tedy najít jen jednu souřadnici těžiště a druhou dopočítat ze znalosti rovnice osy. Ovšem pozor, i když $y = x$ a $y = 0$ jsou hraniční křivky oblasti osou není přímka $y = \frac{x}{2}$.

Na příkladu výpočtu těžiště rovinného tělesa jsme zopakovali substituční metodu pro určitý integrál funkce jedné proměnné a možnosti její využití při integrování funkce dvou proměnných.

Tématem kapitoly je však *substituce ve dvojném integrálu* a k její ilustraci použijeme právě vyřešený příklad, a to přestože integrované funkce jsou jednoduché. Problémy nám nadělal spíš komplikovaný popis oblasti a především mez ve tvaru $x = \sqrt{2 - y^2}$, která nás donutila k použití substituce. V dalším řešeném příkladě si proto ukážeme, jak si takovou situaci zjednodušit.

Zadání - 12.2:

Určete souřadnice těžiště rovinného tělesa Ω s hustotou $\sigma(x, y) = 1$, ohraničeného křivkami $y = 0$, $y = x$ a $x^2 + y^2 = 2$.

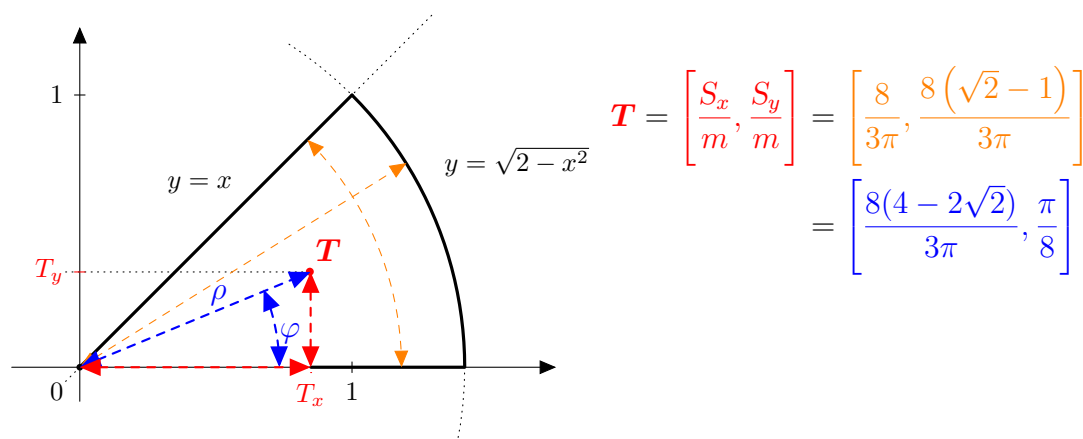
Protože jde o stejné zadání, budeme v podstatě postupovat stejně. Nakreslíme oblast, popíšeme ji, určíme meze, spočteme integrály a vyjádříme souřadnice těžiště.

Zakresleme tedy oblast a popíšeme ji. Jen při tom změníme úhel pohledu, viz obrázek 12.3.

V oblasti je **červeně zvýrazněno její těžiště T** . Jeho souřadnice T_x, T_y jsou na osách zaznačeny **červeně**. Přitom tyto souřadnice lze chápat jako „popis cesty“, která vede z bodu $[0, 0]$ do bodu T . To znamená tedy značí T_x „kroků“ ve směru osy x a T_y „kroků“ ve směru osy y .

Kromě **červené cesty**, je v obrázku zaznačena taky **cesta modrá**. Tu můžeme nejlépe popsat pomocí úhlu φ a ρ , což je vzdálenost od počátku.

³protože oblast Ω je homogenní

Obr. 12.3: Oblast Ω polární souřadnice

Vedle nákresu oblasti jsou souřadnice těžiště zapsány. Jednak **červeně** tak jak jsme si je určili v předchozím příkladě a jednak **modře** pomocí φ a ρ .

Přesná hodnotu ρ je zjistíme pomocí *Pythagorovy věty*:

$$\rho = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \frac{8(4 - 2\sqrt{2})}{3\pi}.$$

Velikost úhlu φ určíme pomocí funkce tangens:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{T_y}{T_x} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) = \frac{\pi}{8}.$$

V nákresu 12.3 jsou ještě **oranžové čáry**, které ilustrují meze, v nichž se mohou ρ a φ pohybovat, aniž by opustili oblast Ω . Maximální délka „ ρ “ je poloměr kružnice, tj. $\sqrt{2}$, pro „úhel φ “ je maximem hodnota $\frac{\pi}{4}$. Minimální hodnotou pro oba je 0. Pro oblast Ω tak máme popis

$$\Omega^* : \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}. \end{array}$$

I bez nákresu je jasné, že oblast, označme ji Ω^* , popsaná těmito nerovnicemi má tvar obdélníku. Což nám integrování zcela jistě zpříjemní.

Ovšem oblast Ω^* je popsána v souřadnicích ρ, φ a integrál v x, y . Proto než budeme integrovat musíme nahradit všechny členy x, y a dx, dy . Zatím jsme nahradili pouze meze. Dalo by se říci, že jsme začali od konce.

K přechodu od souřadnic x, y k souřadnicím ρ, φ musíme popsat jejich vztah. Stejně jako při výpočtu ρ, φ -souřadnic těžiště využijeme i zde vlastností pravoúhlého trojúhelníku. Opět si pomůžeme obrázkem 12.3. **Červeně** jsou v něm zakresleny odvěsny a **modře** přepona a pro ně platí vztahy:

$$\begin{array}{lcl} \cos \varphi & = & \frac{x}{\rho}, \\ \sin \varphi & = & \frac{y}{\rho}, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lcl} x & = & \rho \cos \varphi, \\ y & = & \rho \sin \varphi. \end{array}$$

Posledním krokem k úplné substituci je nahrazení dx a dy . U funkce jedné proměnné jsme substituční vztah zderivovali a bylo hotovo, viz příklad 12.1. Protože, zde nahrazujeme dvě funkce funkcemi dvou proměnných, budeme opět derivovat, ovšem takto:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho \cos \varphi}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho \cos \varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \rho \sin \varphi}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho \sin \varphi}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

To znamená, že jsme spočetli všechny první parciální derivace substitučních vztahů, z nich sestavili *Jakobiho determinant* J , s jehož pomocí nahradíme člen $dx dy$.

Nyní už známe vše, co k úspěšné substituci potřebujeme. Substituční funkce za x a y , náhradu za diferenciál $dx dy$ a přepis integrační oblasti Ω na Ω^* . K tomu ještě poznamenejme, že právě odvozený postup nazýváme *transformací do polárních souřadnic*.

Důležité:

Transformace do *polárních souřadnic*:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Přičemž zde jsou

substituční funkce: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$,

Jakobián: $dx dy = \rho d\rho d\varphi$,

náhrada oblasti: $\Omega \mapsto \Omega^*$.

Polární souřadnice jsou vhodné tam, kde je integrační oblast zadána kružnicí nebo její částí.

A jak se po této substituci změní výpočet těžiště? Takto

$$\begin{aligned} m &= \iint_{\Omega} 1 dx dy = \iint_{\Omega^*} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\varphi = \\ &= \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} \left[\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \\ S_x &= \iint_{\Omega} x dx dy = \iint_{\Omega^*} \rho \cos \varphi \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} \left[\sin \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3}, \\ S_y &= \iint_{\Omega} y dx dy = \iint_{\Omega^*} \rho \sin \varphi \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi = \\ &= \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} \left[-\cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili možnosti rozdělit integrál součinu dvou funkcí na obdélníkové oblasti na součin dvou integrálů, viz příklad 9.1. Výsledky, hmotnost i statické momenty, samozřejmě zůstávají stejné. Samotný výpočet se však po substituci značně zjednodušil a zrychlil.

Substituce do polárních souřadnic není samozřejmě jedinou možností, jak ve dvojném integrálu měnit proměnné či tvar integrační oblasti. Obecně však postupujeme obdobně jako v případě transformace do polárních souřadnic, tj.:

Důležité:

Substituce ve dvojném integrále:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega^*} f(u(\chi, \psi), v(\chi, \psi)) |J| \, d\chi \, d\psi.$$

Přičemž potřebujeme vhodně zvolit

$$\text{substutiční funkce: } x = u(\chi, \psi), \, y = v(\chi, \psi).$$

A spočítat

$$\text{Jakobián } |J|: \, dx \, dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \chi} & \frac{\partial u}{\partial \psi} \\ \frac{\partial v}{\partial \chi} & \frac{\partial v}{\partial \psi} \end{vmatrix} d\chi \, d\psi,$$

$$\text{náhradu oblasti: } \Omega \mapsto \Omega^*.$$

Zadání - 12.3:

Spočtete

$$\iint_{\Omega} \left((2 + x + y)^3 (y - x - 1)^2 \right) dx \, dy,$$

kde Ω je čtyřúhelník s vrcholy $\mathbf{A} = [1, 0]$, $\mathbf{B} = [0, 1]$, $\mathbf{C} = [-1, 0]$ a $\mathbf{D} = [0, 1]$.

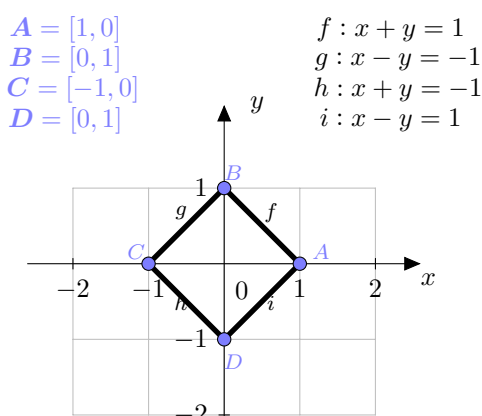
Integrovaná funkce je polynom a po roznásobení bychom k integraci použili pouze vzorec pro $\int x^n dx$, přesto bude lepší si práci ulehčit transformací souřadnic. Zbavme se tedy závorek a nahraďme je pomocí substituce:

$$\left. \begin{aligned} 2 + x + y &= t, \\ y - x - 1 &= s, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + y &= t - 2, \\ y - x &= s + 1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(t - s - 3), \\ y &= \frac{1}{2}(t + s - 1), \end{aligned}$$

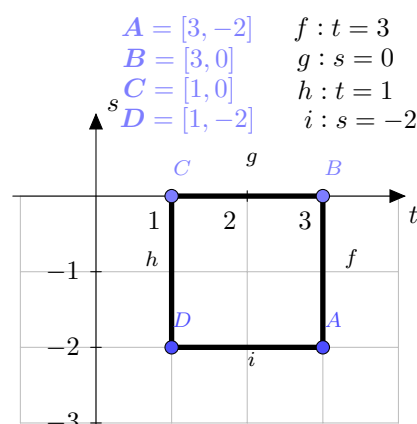
Vypočteme Jakobián

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \left(\frac{1}{2}(t-s-3) \right)}{\partial t} & \frac{\partial \left(\frac{1}{2}(t-s-3) \right)}{\partial s} \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{2}(t+s-1) \right)}{\partial t} & \frac{\partial \left(\frac{1}{2}(t+s-1) \right)}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Pomocí obrázku 12.4a oblast Ω popíšeme. Z tohoto popisu vykreslíme obrázek 12.4b a z něj meze pro nové proměnné s, t . Například pro úsečku f máme rovnici $x + y = 1$ a protože $x + y = t - 2$, je f v souřadnicích s, t popsána jako $t = 3$.



(a) Oblast $\Omega_{x,y}$



(b) Oblast $\Omega_{s,t}$

Z obrázku je taky vidět, že při popisu v x, y souřadnicích bychom se ani v případě oblasti I. typu ani oblasti II. typu nevyhnuli dělení na Ω na dvě podoblasti. Při použití nově zvolených s, t souřadnic jde o oblast obdélníkovou.

A konečně můžeme integrovat:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{x,y}} \left((2+x+y)^3 (y-x-1)^2 \right) dx dy &= \iint_{\Omega_{s,t}} \left((t)^3 (s)^2 \right) \left(\frac{1}{2} \right) ds dt = \frac{1}{2} \int_1^3 \int_{-2}^0 (t^3 s^2) ds dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 t^3 dt \int_{-2}^0 s^2 ds = \frac{1}{2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_1^3 \left[\frac{s^3}{3} \right]_{-2}^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} [t^4]_1^3 [s^3]_{-2}^0 = \\ &= \frac{1}{24} (3^4 - 1^4) (0^3 - (-2)^3) = \frac{1}{24} (81 - 1) (0 - (-8)) = \frac{80}{3}. \end{aligned}$$

12.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:



Zintegrujte na oblasti Ω , oblast zakreslete. Užijte transformaci do polárních souřadnic.

$$(12.1) \iint_{\Omega} x^2 y \, dx \, dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 9, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq y.$$

$$(12.2) \iint_{\Omega} (x + y) \, dx \, dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0.$$

$$(12.3) \iint_{\Omega} xy^2 \, dx \, dy, \quad \Omega : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$(12.4) \iint_{\Omega} xy \, dx \, dy, \quad \Omega : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \leq 0, y \geq 0.$$

$$(12.5) \iint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \, dx \, dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq y \leq x.$$

$$(12.6) \iint_{\Omega} \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}.$$

$$(12.7) \iint_{\Omega} \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy, \quad \Omega : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

$$(12.8) \iint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \, dy, \quad \Omega : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0.$$

$$(12.9) \iint_{\Omega} \frac{1}{x^2} \, dx \, dy, \quad \Omega : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x.$$

$$(12.10) \iint_{\Omega} (1 - x) \, dx \, dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 1, \quad -y \leq x \leq y.$$

Výsledek úlohy:



Zintegrujte na oblasti Ω , oblast zakreslete. Užijte transformaci do polárních souřadnic.

$$(12.1) \frac{81}{5},$$

$$(12.3) 0,$$

$$(12.5) \frac{1}{8} \pi \ln(5),$$

$$(12.7) 1,$$

$$(12.9) \ln(2),$$

$$(12.2) \frac{2}{3},$$

$$(12.4) -\frac{3}{2},$$

$$(12.6) \pi \ln(2),$$

$$(12.8) \pi \ln(2),$$

$$(12.10) \frac{\pi}{4}.$$

Kapitola 13

Křivkový integrál prvního druhu

Cíl:



Již jsme pomocí integrálu počítali obsahy ploch, objemy těles, hmotnosti, statické momenty či těžiště. Cílem této kapitoly se naučit se pracovat s křivkovým integrálem a s jeho počítat délky křivek.

Čas:



K prostudování budete potřebovat 4 hodiny.

Předpoklady:



V rámci kapitoly budou potřeba integrační vzorce a práce s vektory, parametrickými funkcemi a rovnicemi.

Budete umět:



- Parametricky popsat křivku v rovině i prostoru.
- Spočítat křivkový integrál prvního druhu.
- Určit délku křivky, hmotnost křivky.

13.1 Řešené příklady

Zadání - 13.1:



Určete délku části osy x mezi body 0 a 1.

Odpověď je 1. Ovšem protože je kapitola určena integrálu¹, budeme počítat integrál. Z předchozích kapitol, viz řešený příklad 9.1, víme, že $\iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$ na oblasti Ω představuje

¹a protože chceme vypadat světově

její plochu. Takže chceme-li znát délku úsečky u mezi body 0 a 1, počítáme

$$\int_u 1 \, dx = \int_0^1 1 \, dx = [x]_0^1 = 1.$$

Integrálem jsme spočítali velikost plochy mezi osou x a integrovanou funkcí. Funkce je konstantní, plochou je obdélník. Obsah obdélníku je „strana krát výška“. Výška je dána funkcí a tedy je rovna 1. Platí „strana krát výška“ se rovná 1 a proto i délka strany je rovna 1. Takže přesně jak jsme přepočítali, hledaná délka se rovná 1.

Zadání - 13.2:



Určete délku úsečky s krajními body $\mathbf{A} = [0, 1]$ a $\mathbf{B} [1, 0]$.

I když bychom samozřejmě mohli, nebudeme zde integrovat. Vzpomeneme si spíše na kapitolu 1 věnovanou vektorům.

Body $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou krajní body vektoru $\mathbf{u}$ a spočítat jeho velikost. Vektor $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = [1, -1]$ a jeho velikost je

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

Díky znalosti výpočtu velikosti vektoru, resp. díky znalosti *Pythagorovy věty*, tedy víme, že délka této úsečky je rovna $\sqrt{2}$.

Po prvních dvou příkladech lze říci, že nejsou-li křivky křivé, umíme jejich délky spočítat. A s pomocí prvních dvou příkladů se naučíme určit také délky „křivek křivých“.

Zadání - 13.3:



Určete obvod asteroidy popsané parametrickou rovnicí

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Ze zadané rovnice to nejspíše napoprvé tvar křivky nepoznáme. Ovšem z anglického „star“ či latinského „astrum“, které obě značí hvězdu, jistou představu o křivce získat lze. A opravdu, jak lze spatřit na obrázku 13.1, připomíná hvězdu.

K vykreslení jsme samozřejmě použili počítač, nicméně pokud bychom chtěli, či museli, postupovat bez něj, stačilo by si do rovnic dosadit několik hodnot parametru t . Viz tabulka 13.1

Pro parametr $t = 0$ prochází křivka bodem $\mathbf{A} = [0, 0]$, pro $t = \frac{\pi}{2}$ je to bod $[0, 1]$ a tak dále. Protože jsou souřadnice zadány pomocí periodických funkcí $\sin x$ a $\cos x$, budou se i body, resp. jejich souřadnice periodicky opakovat, pokud bychom překročili periodu 2π .

Důležité:



Parametricky zadaná křivka $\mathcal{K}$ in $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{K} : X(t) = [u(t), v(t)], \text{ resp. } \mathcal{K} : X(t) = [u(t), v(t), w(t)], \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

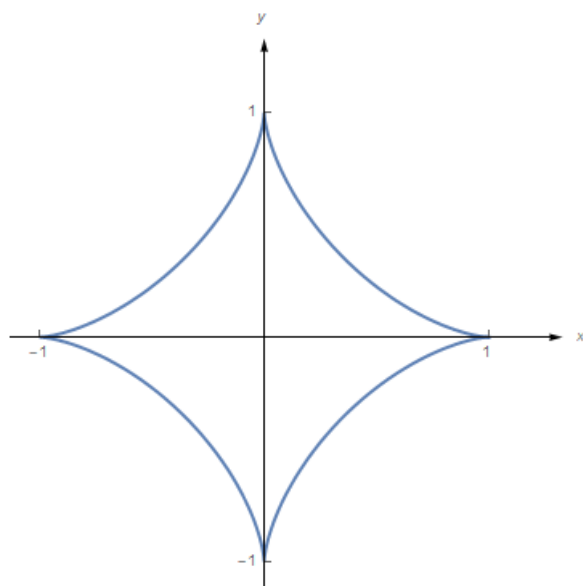
kde $u(t), v(t), w(t)$ jsou spojitě funkce.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	1	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	-1	0	1
y	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	1	0	-1	0
A	$[1, 0]$	$\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right]$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$	$\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$	$[0, 1]$	$[-1, 0]$	$[0, -1]$	$[1, 0]$

Tabulka 13.1: Asteroida - dosazení parametru

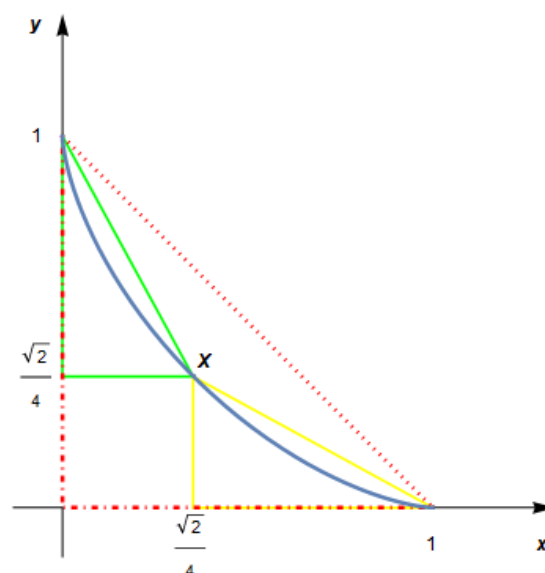
Poznámka:

Na parametrické vyjádření $X(t) = [u(t), v(t)]$ resp. $X(t) = [u(t), v(t), w(t)]$ lze nahlížet jako na *trajektorii* pohybujícího se bodu v závislosti na čase t .



Obr. 13.1: Asteroida

$$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Obr. 13.2: Asteroida

$$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Z vykreslení křivky², obrázek 13.1, je zřejmé, že k určení obvodu asteroidy bude stačit vyšetřit pouze oblouk v prvním kvadrantu. Na obrázku 13.2 je spolu s touto „čtvrtinou“ zakresleno také několik trojúhelníků, které nám pomohou s odhadem resp. výpočtem obvodu asteroidy.

Uvažujme nejprve **červený pravoúhlý trojúhelník**. Délky jeho **čerchovaných** odvěsen jsme si určili v prvním řešení příkladě 13.1 této. Délku **tečkované** přepony v příkladě druhém, viz 13.1. Obrázek 13.2 a znalost délek odvěsen a přepony vede k prvnímu odhadu délky l čtvrtiny asteroidy. Platí:

$$\sqrt{2} < l < 2.$$

²a také z vlastností funkcí $\sin x$ a $\cos x$

Z obrázku 13.2 je lze také usuzovat, že délka l bude „spíše blíže“ $\sqrt{2}$ než 2. Můžeme ji zkusit odhadnout, řekněme $l = \frac{3}{2}$. Abychom tento odhad ospravedlnili a zpřesnili, rozdělme si oblouk l na dvě půlky.

Souřadnice „půlícího“ bodu $\mathbf{X}$ dostaneme volbou parametru $t = \frac{\pi}{4}$. Jeho souřadnice jsou uvedeny v tabulce 13.1, nicméně pro představu, jak byla tabulka vyplněna, si zde celý výpočet ukažme.

$$x = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$y = v\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Tím jsme také získali délky odvěsen **zeleného** a **žlutého** trojúhelníka. Protože jsou tyto trojúhelníky shodné³, budeme počítat pouze s jedním, např. se **zeleným**. Označme si jeho odvěsny $o_x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ a $o_y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Samozřejmě pokud projdeme všechny, **žluté** i **zelené** odvěsny, náš horní odhad se nijak nezmění, zůstane roven 2. Proto se musíme zaměřit na přepony. Jejich délku p vypočteme pomocí *Pythagorovy věty*.

$$p = \sqrt{o_x^2 + o_y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}.$$

Protože musíme přejít dvě přepony, **žlutou** a **zelenou**, zbývá délku obou přepon sečíst. Tak jsme získali lepší „dolní“ odhad, tj.

$$\sqrt{2} < \sqrt{5 - 2\sqrt{2}} < l < 2.$$

Odhadněme tento odhad⁴. Víme, že $\sqrt{2}$ je „zhruba“ 1.41, takže $5 - 2\sqrt{2}$ je „zhruba zhruba“ 2.25 a protože je $15^2 = 225$, musí být $\sqrt{2.25} = 1.5$. Vypadá to, že $l = \frac{3}{2}$ je celkem dobrý odhad.

Samozřejmě jde stále jen o pouhý odhad. Pokud budeme chtít ještě lepší odhad, budeme znovu půlit. Tak dostaneme čtyři menší pravoúhlé trojúhelníky, jejichž přeponami nahradíme příslušný oblouk. Délku přepon spočteme pomocí Pythagorovy věty, jejich délku sečteme a máme zase o kousek lepší odhad. A pak znovu. A znovu. A znovu. A pravoúhlé trojúhelníčky se stanou menší a ještě menší, až budou nejmenší na celém světě. A když sečteme délky jejich přepon, dostaneme hledanou délku l .

Než však zjistíme délku přepon, musíme znát odvěsny. Protože jsme odvěsny neustále zmenšovali, platí pro jejich délky $o_x \rightarrow 0$ a $o_y \rightarrow 0$. A tak se, podobně jako v úvahách při zavádění derivace či integrálu, na scéně objevují dx a dy .

K dalšímu postupu potřebujeme dx resp. dy , vyjádřit a popsat přesněji. Protože x resp. y máme zadány parametricky, můžeme psát

$$x = \cos^3 t, \rightarrow dx = 3\cos^2 t(-\sin t) dt,$$

$$y = \sin^3 t, \rightarrow dy = 3\sin^2 t \cos t dt.$$

³nepřímo

⁴:)

Délka přepony, stále pomocí *Pythagorovy věty*, je

$$\begin{aligned}\sqrt{d^2x + d^2y} &= \sqrt{(3 \cos^2 t (-\sin t) dt)^2 + (3 \sin^2 t \cos t dt)^2} = \\ &= \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t dt^2 + 9 \sin^4 t \cos^2 t dt^2} = 3 \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= 3 \cos t \sin t dt.\end{aligned}$$

Nyní je před námi již jen jediný úkol. Sečíst délky všech těchto přepon. A k takovému sčítání se nejlépe hodí integrál.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \sin t dt = \left. \begin{array}{l} p = \sin t \\ dp = \cos t dt \\ t = 0 \Rightarrow p = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p = 1 \end{array} \right| = 3 \int_0^1 p dp = 3 \left[\frac{p^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Laskavý čtenář jistě promine, že jsme se zde v zájmu co největší názornosti dopustili jistých zjednodušení a to zvláště při limitním přechodu k odvěsnám a přeponám „menších a menších“ trojúhelníků. Věříme však, že se tak podařilo osvětlit „proč a jak se tam bere ta odmocnina.“

Poznámka:



Místo dx a dy se v souvislosti s *křivkovým integrálem prvního druhu* používá spíše značení $\dot{x}$ resp. $\dot{y}$. Tímto zápisem se vyjadřuje, že souřadnice x resp. y jsou funkcí t , tj. $x = x(t)$ resp. $y = y(t)$ a ona tečka nad x resp. y značí derivaci podle t .

Celý postup určení délky l křivky $\mathcal{K}$ by se tak zapsal:

$$\int_{\mathcal{K}} 1 dS = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \sin t dt = \dots = \frac{3}{2}.$$

Ať už však použijeme ten nebo onen zápis, postup zůstává ve své podstatě stejný a především výsledek je stejný.

Takto jsme určili, že délka čtvrtiny asteroidy l je $\frac{3}{2}$. Celý její obvod je tedy roven 6.

Takto tedy umíme určit délku křivky. Pokud na křivku nahlédneme jako na „kus drátu“, bude mít i hmotnost a také tu lze určit křivkovým integrálem.

V duchu úvah v kapitole 11 věnované těžišti lze křivkový integrál $\int 1 dS$ pro křivku $\mathcal{K}$ považovat za její *hmotnost*, předpokládáme-li, že je *homogenní*.

Pokud o křivku homogenní nejde a její hustota je dána funkcí $\sigma(x, y)$, budeme muset k určení její hmotnosti integrovat tuto funkci. Viz následující příklad.

Zadání - 13.4:



Určete hmotnost křivky $\mathcal{K}$ s hustotou $\sigma(x, y)$

$$\mathcal{K} : x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \sigma(x, y) = x^2 + y^2.$$

Zadanou křivkou je asteroida z předcházejícího příkladu, proto se již nemusíme zdržovat nákresy a odvozováním. Budeme rovnou k integrování. Hmotnost m křivky $\mathcal{K}$ se rovná

$$m = \int_{\mathcal{K}} \sigma(x, y) \, dS.$$

Známe parametrizaci křivky $\mathcal{K}$ a člen dS

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t, \rightarrow \dot{x} = 3 \cos^2 t (-\sin t) \, dt, \\ y &= \sin^3 t, \rightarrow \dot{y} = 3 \sin^2 t \cos t \, dt, \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \\ dS &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt = 3 \cos t \sin t \, dt \end{aligned}$$

Funkce $\sigma(x, y) = x^2 + y^2$ je „souměrná“, viz obrázek 13.3, v každém z kvadrantů se chová stejně. Proto si i zde pomůžeme rozdělením křivky na čtvrtiny, viz obrázek 13.4. Takže budeme integrovat v mezích $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, tak dostáváme:

$$m = \int_{\mathcal{K}} \sigma(x, y) \, dS = \int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2) \, dS = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + y^2) \cos t \sin t \, dt.$$

Je jasné, že nemůžeme pokračovat dále, dokud nepřepíšeme i funkci $\sigma(x, y)$ pomocí parametru t . Nicméně ani to nebude nic těžkého, protože parametrizaci již známe.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \sigma(x, y) \, dS &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + y^2) \cos t \sin t \, dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos^3 t)^2 + (\sin^3 t)^2) \cos t \sin t \, dt = \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7 t \sin t + \sin^7 t \cos t) \, dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t \sin t \, dt + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos t \, dt. \end{aligned}$$

Každý z integrálů spočteme pomocí jednoduchou substitucí.

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t \sin t \, dt = \left| \begin{array}{ll} p &= \cos t \\ dp &= -\sin t \, dt \\ t=0 &\Rightarrow p=1 \\ t=\frac{\pi}{2} &\Rightarrow p=0 \end{array} \right| = -3 \int_1^0 p^7 \, dp = 3 \int_0^1 p^7 \, dp = 3 \left[\frac{p^8}{8} \right]_0^1 = \frac{3}{8}.$$

Obdobně vyřešíme i druhý z nich

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos t \, dt = \left| \begin{array}{ll} p &= \sin t \\ dp &= \cos t \, dt \\ t=0 &\Rightarrow p=0 \\ t=\frac{\pi}{2} &\Rightarrow p=1 \end{array} \right| = 3 \int_0^1 p^7 \, dp = 3 \left[\frac{p^8}{8} \right]_0^1 = \frac{3}{8}.$$

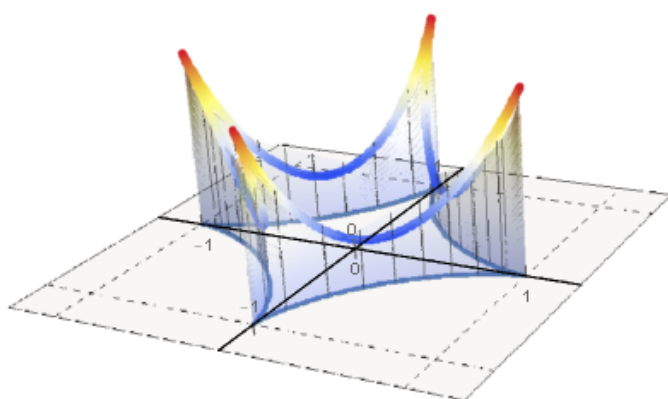
Hledanou hmotnost celé asteroidy, získáme sečtením dvou předchozích výsledků a násobením 4, protože jsme počítali jen s její čtvrtinou. Takto máme

$$m = \int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2) \, dS = 4 \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \right) = 3.$$

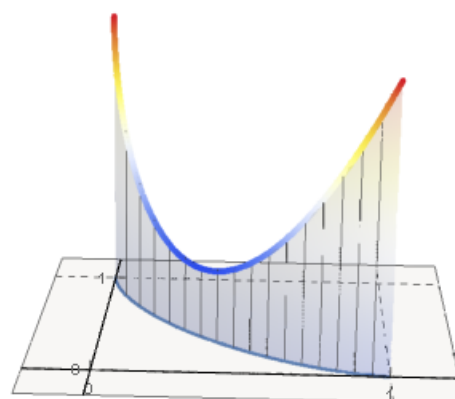
Poznámka:

První aplikací integrálu, kterou jsme si připomínali, byl výpočet obsahu plochy mezi osou x a funkcí $f(x)$. Viděno touto optikou hraje křivka $\mathcal{K}$ roli osy x a omezuje plochu zdola. Funkce $\sigma(x, y)$ shora. Situace je zakreslena na obrázku 13.3 resp. 13.4 pro čtvrt asteroidy. Výsledek integrálu pak značí velikost naznačené plochy.

Dovolíme-li si „analogii ze života“, pak jsme spočítali spotřebu materiálu na oplocení zahrady ohraničené křivkou $\mathcal{K}$ s výškou plotu $\sigma(x, y)$.



Obr. 13.3: Plocha pod asteroidou



Obr. 13.4: Plocha pod asteroidou

V kapitole jsme si ukázali vlastnosti a některé z aplikací *křivkového integrálu I. druhu*. Vše jsme ilustrovali na příkladech rovinné křivky $\mathcal{K}$, nicméně stejné postupy lze použít i pro křivky prostorové či dokonce vícerozměrové.

Důležité:

Křivkový integrál I. druhu ze skalární funkce $f(x, y, z)$ pro křivku $\mathcal{K}$ danou parametризací $x = u(t)$, $y = v(t)$ a $z = w(t)$ s $a \leq t \leq b$ spočteme jako

$$\int_K f(x, y, z) \, dS = \int_a^b f(u(t), v(t), w(t)) \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2} \, dt,$$

přičemž $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ značí derivace funkcí $u(t), v(t), w(t)$ podle t .

13.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:



Vypočtete křivkový integrál I. druhu pro zadanou křivku $\mathcal{K}$.

$$(13.1) \int_{\mathcal{K}} xy \, dS, \quad \mathcal{K} : \text{čtvrtkružnice } x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$(13.2) \int_{\mathcal{K}} (x+y)^2 \, dS, \quad \mathcal{K} : \text{půlkružnice } x^2 + y^2 = 4, 0 \leq x.$$

$$(13.3) \int_{\mathcal{K}} x^2 \, dS, \quad \mathcal{K} : \text{horní polovina kružnice } x^2 + y^2 = a^2, a > 0.$$

$$(13.4) \int_{\mathcal{K}} xz \, dS, \quad \mathcal{K} : \text{šroubovice } x = \sin t, y = \cos t, z = t, \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

$$(13.5) \int_{\mathcal{K}} xyz \, dS, \quad \mathcal{K} : \text{úsečka } \mathbf{AB} \quad \mathbf{A} = [1, 2, 2], \mathbf{B} = [1, 3, 3].$$

$$(13.6) \int_{\mathcal{K}} (x-y)^2 \, dS, \quad \mathcal{K} : \text{půlkružnice } x^2 + y^2 = 1, y \leq 0.$$

$$(13.7) \int_{\mathcal{K}} x \, dS, \quad \mathcal{K} : \text{kružnice } x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad z = 1, \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

$$(13.8) \int_{\mathcal{K}} \sqrt{4x^2 + 4x + 2} \, dS, \quad \mathcal{K} : \text{část paraboly } y = x^2 + x + 1 \text{ mezi body } \mathbf{A} = [0, 1], \mathbf{B} = [1, 3].$$

Výsledek úlohy:



Vypočtete křivkový integrál I. druhu pro zadanou křivku $\mathcal{K}$.

$$(13.1) \frac{1}{2},$$

$$(13.4) \sqrt{2}\pi$$

$$(13.7) 1,$$

$$(13.2) 8\pi,$$

$$(13.5) \frac{19\sqrt{2}}{3},$$

$$(13.8) \frac{16}{3}.$$

$$(13.3) \frac{\pi a^3}{2}$$

$$(13.6) 2\pi,$$

Kapitola 14

Křivkový integrál II. druhu Greenova věta

„Práce je skalární veličina, která popisuje dráhové účinky síly.“

Cíl:



Cíl kapitoly je zpracovat téma práce ve vektorovém poli, tedy zavedení *křivkového integrálu druhého druhu*, metody jeho výpočtu a možnosti využití.

Čas:



Na práci s touto kapitolu si vyhraďte 4 hodiny.

Předpoklady:



Budeme pracovat s křivkovým integrálem, proto využijeme základní integrační vzorce a metody, parametrické rovnice popisující křivky a také vektorové operace, *skalární* a *vektorový* součin.

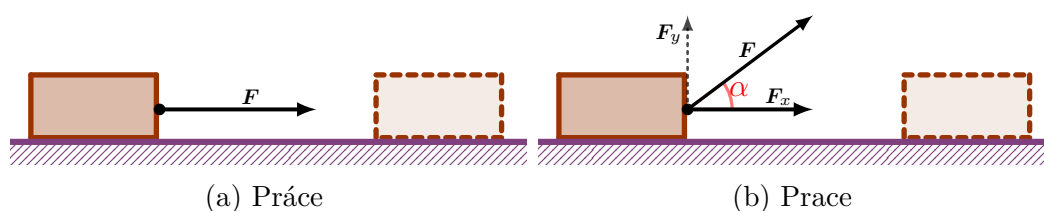
Budete umět:



- Parametrizovat rovinnou a prostorovou křivku $\mathcal{K}$.
- Spočítat *křivkový integrál druhého druhu*.
- Pro uzavřenou křivku integrovat pomocí *Greenovy věty*.

14.1 Řešené úlohy

Obrázek 14.1a je klasickým znázorněním úvodní věty této kapitoly. Síla $\mathbf{F}$ přemísťuje břemeno po dráze $\mathbf{s}$ a vykonává *práci*. Uvažujeme-li tento posuvný pohyb, pak velikost vykonané práce spočteme jako součin velikostí síly F a dráhy s označíme a zapíšeme jej jako $W = F s$.

Obr. 14.1: Oblast Ω

I na obrázku 14.1b působí na břemeno síla $\mathbf{F}$, ovšem tentokrát síla působí v jiném směru, než je směr pohybu. Práci tak vykonává pouze složka síly $\mathbf{F}$ v požadovaném směru působící. V nákresu je označena jako F_x a z vlastností pravoúhlého trojúhelníka víme, že ji spočteme jako $F \cos \alpha$. Výslednou práci pak určíme ze vztahu

$$W = F s \cos \alpha.$$

Síla $\mathbf{F}$ má svůj směr a velikost, jde tedy o *vektor*. Stejně tak je vektorem i dráha $\mathbf{s}$. Označme jejich velikosti $\|\mathbf{F}\|$ a $\|\mathbf{s}\|$ a vzpomeňme si na vzorec pro určení velikosti odchylky dvou vektorů uvedený v kapitole 1, viz strana 1.1,

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}}{\|\mathbf{F}\| \|\mathbf{s}\|} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{s}\| \cos \alpha.$$

To znamená, že práci můžeme spočítat jako skalární součin vektoru síly $\mathbf{F}$ a vektoru dráhy $\mathbf{s}$. Přesně jak „předpověděla“ úvodní věta této kapitoly.

Situace na obrázku 14.1a, resp. 14.1b, je však hodně zjednodušená. Působící síly se mohou měnit a ani dráhy nebývají vždy jen „rovné“. Naštěstí komplikace, které měnící se síly a „křivé“ dráhy přinesou, nejsou nijak velké.

V kapitole 1 jsme se naučili pracovat s vektory, v kapitole 8 s vektorovými funkcemi a v dalších kapitolách, jsme připomenuli techniky integrování. Víc potřebovat nebudeme.

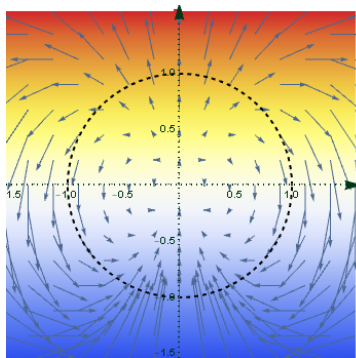
Zadání - 14.1:

Uvažujme silové pole $\mathbf{f}(x, y) = [xy, y^2 - x^2]$. Spočítejte jakou práci pole vykoná přemístěním hmotného bodu z bodu $\mathbf{A} = [0, 1]$ do bodu $\mathbf{B} = [1, 0]$ po kružnici $x^2 + y^2 = 1$.

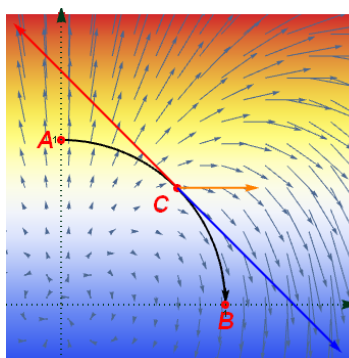
Uvedené vektorové pole $\mathbf{f}(x, y)$ jsme vyšetřovali již v příkladě 8, viz strana 57, v němž jsme pole zobrazili, spočetli jeho *divergenci* a *rotaci*. Využijeme toho a překreslíme si vektorové pole i do této kapitoly, viz obrázek 14.2, a to spolu s kružnicí po níž „se máme“ pohybovat.

Na obrázcích 14.3 a 14.4 je již jen situace v prvním kvadrantu. Na obou obrázcích jsou zvýrazněny tři body a tři vektory. Bod $\mathbf{A}$ je počáteční bod integrační křivky, bod $\mathbf{B}$, je naopak bodem koncovým. Bod $\mathbf{C}$ je uprostřed a pomůže nám s ilustrací.

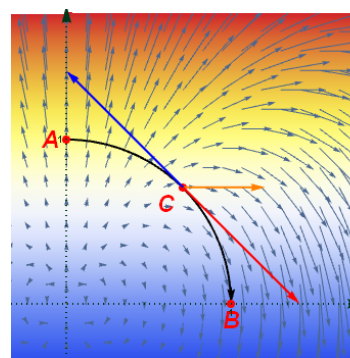
Zmíněné vektory jsou zasazeny do „ilustračního“ bodu $\mathbf{C}$. **Oranžový** vektor popisuje sílu, kterou pole v bodě $\mathbf{C}$ působí, **modrý** a **červený** popisují křivku. Zatímco **oranžový** vektor je má v obou případech stejný směr i velikost, **modrý** a **červený** se na obrázcích liší.



Obr. 14.2: Silové pole
 $\mathbf{f}(x, y) = [xy, y^2 - x^2]$



Obr. 14.3: Popis
 $y = \sqrt{1 - x^2}$



Obr. 14.4: Popis
 $x = \cos u, y = \sin u$

Velikost práce spočítáme skalárním součinem vektoru působící síly a vektoru dráhy. Protože naší dráhou je kružnice musíme ji nejprve vhodně popsat, abychom vyjádřili hledaný vektor dráhy, který udává změnu polohy

Změna polohy je dána změnami Δx a Δy . „Jako obvykle“ budeme požadovat tyto změny, co nejmenší $\Delta x \rightarrow 0$ a $\Delta y \rightarrow 0$. Pokud přidáme do úvahy i závislost y na x , pak podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ není ničím jiným derivací či „sklonem“ tečny popisované křivky.

Hledáme tedy tečný vektor, a to **modré** i **červené** vektory jsou. V čem je tedy rozdíl? Právě ve zvoleném popisu, který do značné míry určuje další postup.

Začneme na obrázku 14.3, tj. popisem $y = \sqrt{1 - x^2}$.¹ Z tohoto popisu můžeme psát

$$\left. \begin{array}{ll} x = x & \rightarrow 1 \, dx = 1 \, dx \\ y = \sqrt{1 - x^2} & \rightarrow 1 \, dy = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{t} = \left[1, \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \right]$$

Takto jsme popisu křivky obdrželi tečný vektor $\mathbf{t}$. Konkrétně v bodě $\mathbf{C} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ máme vektor síly $\mathbf{f}_C = \left[\frac{1}{2}, 0 \right]$ a tečný vektor $\mathbf{t}_C = [1, -1]$. Můžeme spočítat skalární součin $\mathbf{f}_C \cdot \mathbf{t}_C = \frac{1}{2}$.

Stejně bychom postupovali pro každý bod křivky $\mathcal{K}_1$, násobili a výsledky sčítali. K takovému „lepšímu násobení“ se nejlépe hodí integrál.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_1} \mathbf{f}(x, y) \, dS &= \int_{\mathcal{K}_1} [xy, y^2 - x^2] \cdot [dx, dy] = \\ &= \int_0^1 [x\sqrt{1 - x^2}, (\sqrt{1 - x^2})^2 - x^2] \cdot \left[dx, \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \right] = \\ &= \int_0^1 \left(x\sqrt{1 - x^2} + (1 - 2x^2) \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx \end{aligned}$$

Dosazením výše odvozeného popisu křivky se z křivkového integrálu stal integrál funkce jedné proměnné. Zbývá jej spočítat, k čemuž použijeme substituci $t = \sqrt{1 - x^2}$

¹Z implicitní rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ explicitní funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$, viz kapitola 7.

resp. $t^2 = 1 - x^2$. Po substituci získáme²

$$\int_{\kappa_1} \mathbf{f}(x, y) \, dS = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_1^0 (t^2 - 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^0 = \frac{2}{3}.$$

A teď již můžeme odpovědět na otázku. Přemístěním hmotného bodu silové pole vykoná práci $\frac{2}{3}$.

V obrázku 14.4 je však uveden jiný popis a také znázorněné vektory se liší. Využijme tedy i popis, využívající funkcí $\cos t$ a $\sin t$ a s jehož obdobou jsem se setkali v kapitole 12 při zavádění *polárních souřadnic*. Dostáváme se k následujícím vztahům

$$\left. \begin{array}{ll} x = u(t) = \cos u & \rightarrow 1 \, dx = -\sin t \, dt \\ y = v(t) = \sin u & \rightarrow 1 \, dy = \cos t \, dt \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -\sin t, \cos t \end{bmatrix}$$

V tomto zápise odpovídají body **A**, **B** a **C** hodnotám $t = \frac{\pi}{2}$, $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{4}$. **Vektor síly** se nezměnil, ovšem tečný vektor ano:

$$\mathbf{t}_C = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Skalární součin $\mathbf{f}_C \cdot \mathbf{t}_C = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Pojďme se tedy podívat jak se změní integrál a jeho hodnota při použití parametrizace $x = \cos t$ a $y = \sin t$.

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_1} \mathbf{f}(x, y) \, dS &= \int_{\kappa_1} [xy, y^2 - x^2] \cdot [dx, dy] = \\ &= \int_{\kappa_1} [\cos t \sin t, \sin^2 t - \cos^2 t] \cdot [-\sin t \, dt, \cos t \, dt] = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos t \sin^2 t + \sin^2 t \cos t - \cos^3 t \right) dt = \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, du = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cos t \, dt \end{aligned}$$

Opět jsme od křivkového integrálu přešli k integrálu funkce jedné proměnné, který vyřešíme substitucí. Tentokrát to bude $s = \sin t$, díky níž dostáváme³

$$\int_{\kappa_1} \mathbf{f}(x, y) \, dS = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cos t \, dt = -\int_0^1 (1 - s^2) \, ds = -\left[v - \frac{s^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

²Provedení substitute a algebraických úprav zde i výše přeskočených je ponecháno laskavému čtenáři jako cvičení

³detaily opět ponechány laskavému čtenáři jako cvičení

Abychom si objasnili, proč se výsledky liší a který z nich je správný, vraťme se k zadání a k obrázkům 14.3 resp. 14.4. Nejprve je třeba si uvědomit, že hledáme k práci spojenou s přemístěním z bodu $\mathbf{A}$ do bodu $\mathbf{B}$. To je na křivce znázorněno šipkou. V obou případech jsme se „pohybovali“ ve směru **modrých** tečných vektorů. Avšak zatímco v prvním případě tento směr souhlasil s požadovaným směrem, v druhém odpovídal „cestě“ z $\mathbf{B}$ do $\mathbf{A}$, tj. opačné. A odtud pramení změna znaménka výsledku.

Použijeme-li však v druhém případě **červený** tečný vektor $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, bude jeho „směr“ souhlasit se směrem požadovaným. Protože se **modré** a **červené** vektory liší pouze znaménkem, bude se i výsledek lišit pouze znaménkem.

Poznámka:



Laicky řečeno, „je rozdíl něco zvedat nebo pokládat“.

Kromě směrů se však tečné vektory lišily i velikostí. To je dáno tím, že zatímco v prvním případě jsme stále pracovali s proměnnou x , v druhém jsme proměnné x, y změnili a provedli substituci. To se však týká jen popisu křivky $\mathcal{K}_1$, **vektory síly** zůstávají nezměněné.

Poznámka:



V kapitole 13 jsme počítali křivkový integrál *I. druhu*, tj. integrál skalární funkce, výsledek se dá interpretovat jako *délka, hmotnost, plocha* a podobně. V kapitole 14 probíráme křivkový integrál *II. druhu*, tj. integrál vektorové funkce, výsledek interpretujeme jako práci silového pole.

V obou případech je prvním úkolem popsat - *parametrizovat* - křivku. U integrálu *II. druhu* je třeba dbát na správnou orientaci.

Důležité:



Říkáme, že křivka $\mathcal{K}$ je zadaná *parametricky*, pokud ji můžeme popsat jako

$$\mathcal{K} : \mathbf{X}(t) = [u(t), v(t), w(t)], \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

kde $u(t), v(t), w(t)$ jsou spojité funkce *parametru* t .

Křivka $\mathcal{K}$ je orientována *kladně*, jestliže její orientaci volíme souhlasně s průběhem parametru t , píšeme $\mathcal{K}^+$. V opačném případě je křivka orientována *záporně*, píšeme $\mathcal{K}^-$.

Křivku $\mathcal{K}$ se nazýváme *jednoduchou*, jestliže sama sebe neprotíná.

Pro křivku $\mathcal{K}^+$ je bod $\mathbf{A} = \mathcal{K}(a)$ resp. $\mathbf{B} = \mathcal{K}(b)$ *počáteční* resp. *koncový* bod. Je-li $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ hovoříme o křivce *uzavřené*.

Důležité:



Křivkový integrál II. druhu, křivkový integrál vektorové funkce

$$\mathbf{f}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$$

podél kladně orientované křivky $\mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\mathcal{K}} [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)] \cdot [dx, dy, dz] = \\ &= \int_{\mathcal{K}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Při změně orientace mění integrál znaménko.

Poznámka:

U křivkového integrálu *I. druhu* nebyla orientace křivky nijak důležitá. Křivka je stejně dlouhá z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ jako z $\mathbf{B}$ do $\mathbf{A}$.

Zadání - 14.2:

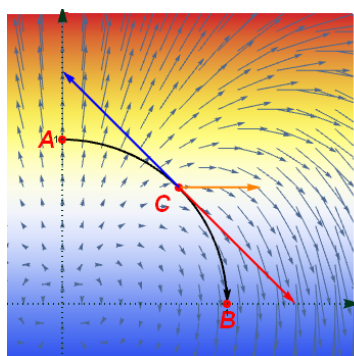
Spočtete křivkové integrály

$$\int_{\mathcal{K}_2} xy dx + (y^2 - x^2) dy, \quad \int_{\mathcal{K}_3} xy dx + (y^2 - x^2) dy,$$

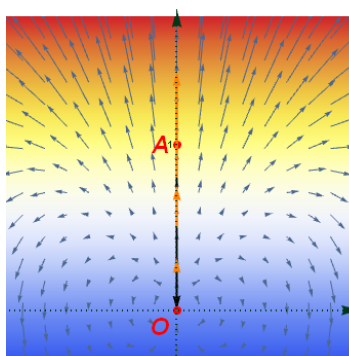
pro úsečky $\mathcal{K}_2 : \mathbf{AO}$ a $\mathcal{K}_3 : \mathbf{OB}$ s krajními body $\mathbf{A} = [0, 1]$, $\mathbf{B} = [1, 0]$ a $\mathbf{O} = [0, 0]$.

Před samotným výpočtem si všimněme, že se jedná o stejné pole jako v příkladě 14.1, tj. $\mathbf{f}(x, y) = [xy, y^2 - x^2]$. Dále pak, že uvažované křivky jsou částmi os x a y , což výpočet docela usnadní. Na parametrizaci obou křivek tak bude nejtěžší rozhodnutí o jejich orientaci.

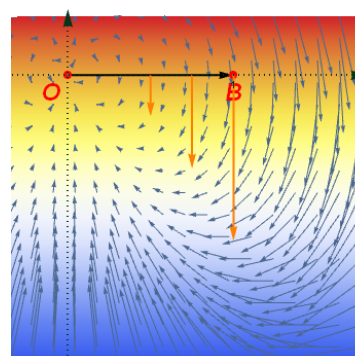
$$\begin{array}{ll} \mathcal{K}_2 : & \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow dx = 0 \\ y = y \rightarrow dy = dy \end{array} & \mathcal{K}_3 : & \begin{array}{l} x = x \rightarrow dx = dx \\ y = 0 \rightarrow dy = 0 \end{array} \end{array}$$



Obr. 14.5: Silové pole $\mathbf{f}(x, y) = [xy, y^2 - x^2]$



Obr. 14.6: $\mathcal{K}_2$ úsečka $\mathbf{AO}$



Obr. 14.7: $\mathcal{K}_3$ úsečka $\mathbf{OB}$

Na obrázku 14.6 jsou zakresleny **silové** vektory $[0, y^2]$ a pro úsečku $\mathbf{AO}$, křivku $\mathcal{K}_2$, je dán vektorem $[0, -1]$. Směry jsou tedy opačné a $\cos \pi = -1$. Odtud lze usuzovat na „záporný“ výsledek.

Na obrázku 14.7 je vidět, že **silové** vektory jsou kolmé na směr pohybu. Pro úsečku $\mathbf{OB}$, křivku $\mathcal{K}_3$, totiž máme vektor $[1, 0]$ a protože $y = 0$ je „síla“ zde působící $[0, -x^2]$. Skalární součin kolmých vektorů je nulový, proto je nulový i integrál podél křivky $\mathcal{K}_3$.

Předchozí úvahy potvrdíme výpočtem. Parametrizace $\mathcal{K}_2$ je tedy *nesouhlasná* a v jejím výpočtu budeme měnit znaménko:

$$\int_{\mathcal{K}_2} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy = - \int_0^1 0 + y^2 \, dy = - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3},$$

$$\int_{\mathcal{K}_3} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy = \int_0^1 0 \, dx - x^2 \cdot 0 \, dy = 0.$$

Obrázek 14.5 opakuje situaci z příkladu 14.1. Výsledek, cesty z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ po kružnici $x^2 + y^2 = 1$ byl $\frac{2}{3}$. Spojíme-li za sebe křivky $\mathcal{K}_2$ a $\mathcal{K}_3$, dostaneme křivku $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, což je také cestu z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$. Ovšem platí

$$\int_{\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3} \mathbf{f} \, ds = \int_{\mathcal{K}_2} \mathbf{f} \, ds + \int_{\mathcal{K}_3} \mathbf{f} \, ds = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

Poznámka:



Výsledek křivkového integrálu II. druhu z bodu $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ závisí na integrační cestě. Obecně nelze pro různé křivky se stejným počátečním a koncovým bodem očekávat stejné výsledky.

Na tom však není nic zvláštního. Pomoci mohou obrázky a „námořnická analogie“. Plavba po ose x je sice zdarma, ale po ose y je plujeme přesně proti větru. Při plavbě po kružnici nám tak nějak „spíše fouká do plachet“.

Zadání - 14.3:



Spočtěte integrál

$$\int_{\mathcal{K}} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy,$$

kde $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, přičemž $\mathcal{K}_1$ je část kružnice $x^2 + y^2 = 1$ mezi body $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$, a dále jsou $\mathcal{K}_2$ resp. $\mathcal{K}_3$ úsečky $\mathbf{AO}$ resp. $\mathbf{OB}$ s body $\mathbf{A} = [0, 1]$, $\mathbf{B} = [1, 0]$ a $\mathbf{O} = [0, 0]$. Křivku $\mathcal{K}$ orientujme následovně, z bodu $\mathbf{A}$ do $\mathbf{O}$, z $\mathbf{O}$ do $\mathbf{B}$ a nakonec $\mathbf{B}$ do $\mathbf{A}$.

Protože je o vektorové pole a křivky z předchozích příkladů, nebude nijak těžké zjistit

výsledek. Stačí změnit znaménko u výsledku příkladu ?? a sečíst s výsledky příkladu 14.1.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy &= \\ &= \underbrace{-\int_{\mathcal{K}_1} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy}_{-\frac{2}{3}} + \underbrace{\int_{\mathcal{K}_2} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy}_{-\frac{1}{3}} + \underbrace{\int_{\mathcal{K}_3} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy}_0 = -1. \end{aligned}$$

Zadání - 14.4:



Pomocí *Greenovy věty* spočítejte integrál

$$\oint_{\mathcal{K}} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy,$$

kde $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, přičemž $\mathcal{K}_1$ je část kružnice $x^2 + y^2 = 1$ mezi body **B** a **A**, a dále jsou $\mathcal{K}_2$ resp. $\mathcal{K}_3$ úsečky **AO** resp. **OB** s body **A** = [0, 1], **B** = [1, 0] a **O** = [0, 0]. Křivku $\mathcal{K}$ orientujeme následovně, z bodu **A** do **O**, z **O** do **B** a nakonec **B** do **A**.

Zadané vektorové pole $\mathbf{f}(x, y)$ i křivka $\mathcal{K}$ je stejná jako v předchozím příkladě. Drobou změnou je označení:

Důležité:



$$\oint_{\mathcal{K}} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy,$$

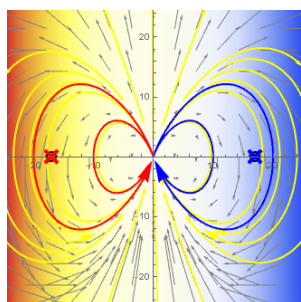
značí křivkový integrál po uzavřené křivce $\mathcal{K}$.

Hlavní změnou tak je použití *Greenovy věty*. K jejímu přiblížení využijeme toho, že v kapitole 8 jsme již vektorové pole $\mathbf{f}(x, y) = [xy, y^2 - x^2]$ vyšetřovali a spočetli jeho *divergenci* a *rotaci*. Znovu si překreslíme obrázek 14.8, který jsme použili k ilustraci *rotace pole*, jako schopnosti pole „roztočit vrtulky“.

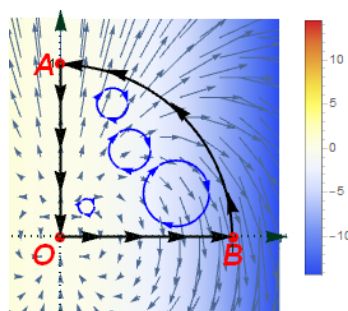
Rotaci v bodě můžeme (intuitivně) chápat jako vektor určující osu, kolem které „kapalina“ v malém okolí tohoto bodu rotuje. Na obrázku 14.9 je **modrými kružnicemi** znázorněno toto otáčení pro několik bodů, přitom velikost poloměru koresponduje s jeho rychlostí.

Rozdíl mezi těmito obrázky spočívá v tom, že zatímco první se snaží ilustrovat siločáry, tj. „velké proudy“, druhý ukazuje rotaci „proudů malých“, tj. rotaci v jednotlivých bodech. A právě myšlenka, že „velké proudy se skládají z malých“, může pomoci s intuitivní představou následujících úvah.

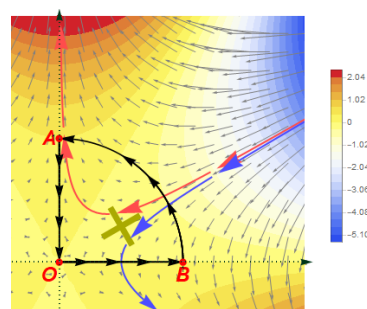
Jak bylo již několikrát zmíněno, křivkový integrál II. druhu podél křivky $\mathcal{K}$ představuje práci při pohybu v silovém poli. Tato práce je spjata s působením či překonáváním sil. Protože je křivka $\mathcal{K}$ uzavřená, ohraničuje oblast, označme ji Ω .



Obr. 14.8: Rotace
vektorového pole
 $\mathbf{f}(x, y) = [xy, y^2 - x^2]$



Obr. 14.9: Křivkový
integrál
 $\int_{\mathcal{K}} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy$



Obr. 14.10: Křivkový
integrál
 $\int_{\mathcal{K}} -2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy$

Dle předchozí analogie, lze na síly (proudy) na hranici pohlížet na výslednici jednotlivých sil (proudů) uvnitř oblasti. Zbývá tedy vhodně posčítat „malé proudy“ uvnitř $\mathcal{K}$, tj. na oblasti Ω . A k takovému sčítání se nejlépe hodí *dvojný integrál*.

Velmi zjednodušeně jsme tak naznačili podstatu *Greenovy věty*, tj. přechod od křivkového integrálu II. druhu k integrálu dvojnému.

Důležité:

Greenova věta: Necht' $\mathbf{f}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$ je diferencovatelná vektorová funkce v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jejíž hranicí je dostatečně hladká uzavřená křivka $\mathcal{K}_+$. Pak platí:

$$\oint_{\mathcal{K}_+} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] \, dx \, dy.$$

Spočtíme zadaný tedy zadaný pomocí *Greenovy věty*.

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{K}} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial y^2 - x^2}{\partial x} - \frac{\partial xy}{\partial y} \right] \, dx \, dy = \\ &= \iint_{\Omega} (-2x - x) \, dx \, dy = -3 \iint_{\Omega} x \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Oblast Ω je čtvrtkružnice, proto ji popíšeme *polárními souřadnicemi*⁴, viz kapitola ??.

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{K}} xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy &= -3 \iint_{\Omega} x \, dx \, dy = -3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \cos \phi \, d\rho \, d\phi = \\ &= -3 \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \, d\phi = -3 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \left[\sin \phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -3 \left(\frac{1}{3} - 0 \right) (1 - 0) = -1. \end{aligned}$$

⁴detaily jsou ponechány laskavému čtenáři jako cvičení

Přesně dle očekávání je výsledek totožný. Avšak v případě „křivkového“ jsme museli popsat křivky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ a $\mathcal{K}_3$ funkcemi, spočítat derivace těchto funkcí, dosadit parametrizace a počítat tři integrály. V případě *Greenovy věty* stačil jeden poměrně jednoduchý integrál.

Poznámka:



Greenovu větu lze dále zobecnit. Například pro případ trojrozměrné plochy a $\mathcal{K}$ ohraničující trojrozměrnou plochu Ω jde o *Stokesovu větu*. Použijeme-li místo rotace *divergenci*, můžeme dát do souvislosti tok vektorového pole přes hranici objemu, tzv. *Gauss-Ostrogradského věta*.

Věty mají široké uplatnění ve fyzice, uveďme například *Gaussův zákon elektrostatiky*: Tok elektrické intenzity Φ_E libovolnou uzavřenou plochou^a je přímo úměrný elektrickému náboji Q nacházejícímu se uvnitř této plochy.

^aGaussovou plochou

Zadání - 14.5:



Uvažujme silové pole $\mathbf{f}(x, y) = [-2xy, y^2 - x^2]$. Spočítejte jakou práci pole vykoná přemístěním hmotného bodu z bodu $\mathbf{A} = [0, 1]$ do bodu $\mathbf{B} = [1, 0]$ po kružnici, $x^2 + y^2 = 1$, parabolách $y = 1 - x^2$ a $x = (1 - y)^2$, a po úsečce $\mathbf{AB}$.

Označme křivky postupně $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ a $\mathcal{K}_4$. Popis a parametrizaci $\mathcal{K}_1$ známe z příkladu ??, proto budeme rovnou počítat⁵.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_1} -2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2 \cos t \sin t (-\sin t) + (\sin^2 t - \cos^2 t) \cos t) \, dt = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t \sin^2 t + (\sin^2 t - (1 - \sin^2 t)) \cos t) \, dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin^2 t - 1) \cos t \, dt = \\ &= - \int_0^1 (4u^2 - 1) \, du = - \left[\frac{4u^3}{3} - u \right]_0^1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

V případě parabol máme křivku $\mathcal{K}_2$ resp. $\mathcal{K}_3$ zadánu explicitními vztahy $y = 1 - x^2$ resp. $x = (1 - y)^2$. Parametrizaci proto provedeme nahrazením nezávislé proměnné parametrem, tj. $x = s$ a $y = 1 - s^2$, resp. $y = t$ a $x = (1 - t)^2$. Pro křivku $\mathcal{K}_2$ máme parametrizaci *souhlasnou*, ale pro $\mathcal{K}_3$ *nesouhlasnou*. Víme vše, můžeme počítat⁶

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_2} -2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy &= \int_0^1 (-2s(1 - s^2) \, ds + ((1 - s^2)^2 - s^2)(-2s) \, ds) = \\ &= -2 \int_0^1 (2s - 4s^3 + s^5) \, ds = -2 \left[s^2 - s^4 + \frac{s^6}{6} \right]_0^1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

⁵detaily parametrizace a použité substituce $u = \sin t$ ponecháváme laskavému čtenáři jako cvičení

⁶detaily ponecháváme laskavému čtenáři jako cvičení

resp.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_3} -2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy &= - \int_0^1 -2(1-t)^2 t (-2(1-t)) \, dt + (t^2 - ((1-t)^2)^2) \, dt = \\ &= - \int_0^1 (-1 + 8t - 17t^2 + 16t^3 - 5t^4) \, ds = - \left[-t + 4t^2 - \frac{17t^3}{3} + 4t^4 - t^5 \right]_0^1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pro parametrizaci úsečky si určíme vektor $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ a zapíšeme *parametrickou rovnici přímky*⁷, tak dostaneme

$$\mathcal{K}_4: \quad \begin{aligned} x &= A_x + tu_x = 0 + t \rightarrow dx = dt \\ y &= A_y + tu_y = 1 - t \rightarrow dy = -dt \end{aligned}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Přitom jsme použili $\mathbf{A} = [A_x, A_y]$ a $\mathbf{u} = [u_x, u_y]$. Tím, že je parametr $0 \leq t \leq 1$ popisují rovnice pouze úsečku $\mathbf{AB}$. Parametrizace je souhlasná.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_4} -2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy &= \int_0^1 -2t(1-t) \, dt + ((1-t)^2 - t^2) \, dt = \\ &= \int_0^1 (1 - 4t + 2t^2) \, dt = \left[t - 2t^2 + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ve všech případech řešených v předchozím příkladě 14.1 jsme dospěli ke stejnému výsledku. Otázkou je, zda je to náhoda, vlastnost bodů $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, uvažovaných křivek či samotného vektorového pole $\mathbf{f}(x, y)$. Díky zkušenostem z příkladů ??, 14.1 a 14.1 můžeme body a křivku vyloučit. S dalším rozhodováním pomůže příklad následující.

Zadání - 14.6:



Pomocí *Greenovy věty* spočtěte integrál

$$\oint_{\mathcal{K}} -2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy,$$

kde $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, přičemž $\mathcal{K}_1$ je část kružnice $x^2 + y^2 = 1$ mezi body $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$, a dále jsou $\mathcal{K}_2$ resp. $\mathcal{K}_3$ úsečky $\mathbf{AO}$ resp. $\mathbf{OB}$ s body $\mathbf{A} = [0, 1]$, $\mathbf{B} = [1, 0]$ a $\mathbf{O} = [0, 0]$. Křivku $\mathcal{K}$ orientujme následovně, z bodu $\mathbf{A}$ do $\mathbf{O}$, z $\mathbf{O}$ do $\mathbf{B}$ a nakonec $\mathbf{B}$ do $\mathbf{A}$.

Integrační cesta, tj. křivka $\mathcal{K}$, zůstává stejná jako v příkladě 14.1. Jde hranici oblasti Ω , tj. čtvrtkruhu o poloměru 1 a středem v počátku. Její popis známe, přejdeme k integrování:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{K}} -2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial(y^2 - x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-2xy)}{\partial y} \right] dx \, dy = \\ &= \iint_{\Omega} (-2x - (-2x)) \, dx \, dy = \iint_{\Omega} 0 \, dx \, dy = 0. \end{aligned}$$

⁷viz kapitola 1 či kapitola 4 a určování rovnice *normály* na straně 28

Popis oblasti jsme však vůbec neupotřebili. Integrovanou funkcí byla 0 a proto je 0 i výsledek integrálu, a to bez ohledu na integrační oblast.

Tohoto zjištění můžeme využít k dalším pozorováním.

Protože víme, že integrál po uzavřené křivce $\mathcal{K}$ je roven 0 a že integrál podél křivky $\mathcal{K}_1$ z bodu $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ je roven $-\frac{1}{3}$, viz příklad 14.1, musí platit

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\mathcal{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0, \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= - \int_{\mathcal{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

Z toho všeho plyne, že

$$\int_C -2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy = -\frac{1}{3}$$

pro každou křivku $\mathcal{C}$ z bodu $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$. Stačí totiž doplnit cestu po kružnici $\mathcal{K}_1$ křivkou $\mathcal{C}$ a tím uzavřít oblast.

Shodné výsledky z příkladu ?? tedy nejsou dílem náhody, zvolených bodů ani křivek, ale vlastností vektorového pole.

Vektorové pole $\mathbf{f}(x, y) = [-2xy, y^2 - x^2]$ je zakresleno na obrázku 14.10. Pomocí „vrtulky“ se opět pokusíme ilustrovat *rotaci* pole. Zatímco do horní „lopatky“ tlačí červená síla, do dolní modrá, obě jsou přitom v rovnováze a vrtulka se neroztočí.

Že to platí pro všechny body (vrtulky), ověříme výpočtem rotace. Zapišeme pole ve tvaru $\mathbf{f}(x, y, z) = [-2xy, y^2 - x^2, 0]$ a použijeme vzorce z kapitoly 8 opravdu dostaneme $\text{rot} \mathbf{f} = [0, 0, 0]$. Jedná se tedy o pole *nevírové*.

Poznámka:

Spočteme-li i *divergenci* zjistíme, že $\text{div} \mathbf{f} = 0$ a pole je *nezřídlové*, to však ve výpočtu nehraje roli.

Úvahy z příkladu 14.1 lze následovně shrnout.

Důležité:

Věta o nezávislosti integrálu na integrační cestě: Uvažujme vektorovou funkci $\mathbf{f}(x, y, z)$, křivku $\mathcal{K}$ a oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Následující výroky jsou ekvivalentní za předpokladu hladkosti funkcí, regulárnosti křivek a jednoduše souvislé oblasti Ω .

- Integrál $\int_{\mathcal{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ nezávisí v Ω na integrační cestě.
- Křivkový integrál $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ po libovolné uzavřené křivce $\mathcal{C}$ v Ω je roven nule.
- Rotace $\text{rot} \mathbf{f}$ vektorového pole $\mathbf{f}$ je v Ω rovna nulovému vektoru, pole je *nevírové*.

Jak lze poznatku, že na výsledek křivkového integrálu nezávisí na integrační cestě, využít si ukážeme v dalším řešeném příkladě.

Zadání - 14.7:



Uvažujme silové pole $\mathbf{f}(x, y) = [-2xy, y^2 - x^2]$. Spočítejte jakou práci pole vykoná přemístěním hmotného bodu z bodu $\mathbf{A} = [1, 1]$ do bodu $\mathbf{B} = [2, 2]$.

Protože platí

$$\frac{\partial y^2 - x^2}{\partial x} = \frac{\partial -2xy}{\partial y},$$

nezávisí velikost vykonané práce na cestě. Lze si tedy cestu zvolit, tak aby integrování bylo, co nejjednodušší. Pro body $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ to bude (nejspíše) přímka $x = y$. Zvolíme-li její parametrizaci $x = t, y = t$ a $t \in \langle 1, 2 \rangle$ dostáváme⁸

$$\int_1^2 -2t \, t \, dt + (t^2 - t^2) \, dt = -2 \int_1^2 t^2 \, dt = -2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^2 = -\frac{14}{3}.$$

Výpočet nebyl těžký, ale jeho jednoduchost byla dána také jednoduchostí zvolené cesty, resp. krajních bodů. Pro body na přímce dané rovnicí $y = kx + q$ se výpočet přece jen protáhne.

V kapitole 5 jsme skalární funkci pomocí *gradientu* přiřadili vektorové pole. Nyní naopak, k vektorovému poli $\mathbf{f}(x, y)$ nalezneme skalární funkci $\phi(x, y)$. Takovou funkci nazýváme *potenciálem*, přesněji

Důležité:



Potenciálem vektorového pole $\mathbf{f}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$ nazýváme skalární pole $\phi(x, y, z)$, jestliže platí:

$$\mathbf{f} = \nabla \phi.$$

Má-li vektorové pole potenciál, nazýváme je *potenciálové*.

- Je-li pole $\mathbf{f}$ je potenciálové, pak platí

$$(\star) \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

- Platí-li $(\star)$, pak je pole $\mathbf{f}$ potenciálové.

Pole $\mathbf{f}(x, y)$ uvažované v tomto příkladě *potenciálové* je. Nalezneme tedy funkci $\phi(x)$.

⁸detaily ponechány laskavému čtenáři jako cvičení

Z uvedeného víme, že:

$$\begin{aligned}\nabla\phi(x, y) &= \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right] = [-2xy, y^2 - x^2] \Rightarrow \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} = -2xy \Rightarrow \\ \phi(x, y) &= \int -2xy \, dx = -x^2y + c(y).\end{aligned}$$

Porovnali jsme první složku $\nabla\phi$ s první složkou pole $\mathbf{f}$. Zintegrovali jsme, abychom se „zbavili“ derivace podle x . Půl je hotovo. Nyní tento „poloviční“ tvar ϕ zderivujeme podle y a porovnáme s druhou složkou pole $\mathbf{f}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial(-x^2y + c(y))}{\partial y} = y^2 - x^2 \Rightarrow -x^2 + \frac{\partial c(y)}{\partial y} = y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{\partial c(y)}{\partial y} = y^2 \Rightarrow \\ c(y) &= \int y^2 \, dy = \frac{y^3}{3}.\end{aligned}$$

Zbývá dát zkombinovat oba výsledky a tvar funkce ϕ upravit

$$\phi(x, y) = -x^2y + c(y) = -x^2y + \frac{y^3}{3} = \frac{1}{3}y(y^2 - 3x^2).$$

Nyní konečně můžeme potenciálu vektorového pole využít. Úkolem bylo spočítat práci pro „přesun“ z bodu $\mathbf{A} = [1, 1]$ do bodu $\mathbf{B} = [2, 2]$. Z předcházejících úvah víme, že pole je *potenciálové*, že velikost práce nezávisí na zvolené cestě, že závisí na koncových bodech. Je-li $\mathcal{K}$ křivka spojující tyto body, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \phi(\mathbf{B}) - \phi(\mathbf{A}) = \left(\frac{2}{3}(2^2 - 3 \cdot 2^2) - \frac{1}{3}(1^2 - 3 \cdot 1^2) \right) = -\frac{16}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{14}{3}.$$

Díky znalosti potenciálu ϕ vektorového pole $\mathbf{f}$ tak můžeme práci počítat pouhým dosazením počátečního a koncového bodu. Na závěr poznamenejme, že na obrázku 14.10 je graf potenciálu $\phi(x, y)$, či lépe řečeno jeho hladin, použit jako podbarvení.

Poznámka:

Uvažujme těleso o hmotnosti m , které zvedáme z povrchu Země do výšky h . Jakou vykonáme práci? Bude to

$$W = E_p = m g h,$$

kde g je tíhové zrychlení. Jak je ze vzorce patrné, trajektorii pohybu nemusíme brát do úvahy. A to proto, že v blízkosti povrchu Země můžeme její gravitační pole považovat za *homogenní*, popisovat jej *potenciálem* a počítat s *potenciální energií* E_p .

14.2 Úlohy k samostatné práci

Úloha:

Vypočtěte křivkový integrál II. druhu pro zadanou křivku $\mathcal{K}$.

$$(14.1) \int_{\mathcal{K}} x \, dx + y \, dy + (xz - y) \, dz, \quad \mathcal{K} : x = t^2, \, y = 2t, \, z = 4t^3, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

$$(14.2) \int_{\mathcal{K}} y \, dx + x \, dy, \quad \mathcal{K} : x = 4 + y^2, \text{ mezi body } \mathbf{A} = [4, 0], \, \mathbf{B} = [8, 2].$$

$$(14.3) \int_{\mathcal{K}} (x^2 - 2xy) \, dx + (y^2 - 2xy) \, dy, \quad \mathcal{K} : y = x^2, \, -1 \leq x \leq 1.$$

$$(14.4) \int_{\mathcal{K}} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz, \quad \mathcal{K} : x = \cos t, \, y = \sin t, \, z = t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

$$(14.5) \int_{\mathcal{K}} x \, dx + y \, dy + z \, dz, \quad \mathcal{K} : \text{úsečka } \mathbf{AB} \text{ s } \mathbf{A} = [0, 0, 0], \, \mathbf{B} = [0, 1, -1].$$

$$(14.6) \int_{\mathcal{K}} \frac{1}{y} \, dx + \frac{1}{x} \, dy, \quad \mathcal{K} : x = y^2, \text{ mezi body } \mathbf{A} = [1, 1], \, \mathbf{B} = [4, 2].$$

$$(14.7) \int_{\mathcal{K}} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz, \quad \mathcal{K} : \text{úsečka } \mathbf{AB} \text{ s } \mathbf{A} = [1, 2, 3], \, \mathbf{B} = [3, 2, 1].$$

$$(14.8) \int_{\mathcal{K}} (2 - y) \, dx + (x - 1)^2 \, dy, \quad \mathcal{K} : \text{úsečka } \mathbf{AB} \text{ s } \mathbf{A} = [1, 2], \, \mathbf{B} = [3, 4].$$

$$(14.9) \int_{\mathcal{K}} (1 - xy) \, dy, \quad \mathcal{K} : x^2 + y^2 = 4, \text{ mezi body } \mathbf{A} = [-2, 0], \, \mathbf{B} = [0, 2].$$

$$(14.10) \int_{\mathcal{K}} x \, dx + y \, dy + z \, dz, \quad \mathcal{K} : x = t \cos t, \, y = t \sin t, \, z = t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Úloha:

Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál II. druhu pro kladně orientovanou křivku $\mathcal{K}$.

$$(14.11) \oint_{\mathcal{K}} xy \, dx + (x + y) \, dy, \quad \mathcal{K} : x^2 + y^2 = 1,$$

$$(14.12) \oint_{\mathcal{K}} -2y \, dx + x^2 \, dy, \quad \mathcal{K} : \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 : \mathcal{K}_1 : y = 1 - x^2, \mathcal{K}_2 : y = 0.$$

$$(14.13) \oint_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2) \, dx + 2xy \, dy, \quad \mathcal{K} : \triangle ABC \text{ s } \mathbf{A} = [0, 0], \, \mathbf{B} = [1, 1], \, \mathbf{C} = [1, 2].$$

$$(14.14) \oint_{\mathcal{K}} xy^2 \, dx - x^2y \, dy, \quad \mathcal{K} : x^2 + y^2 = 4.$$

$$(14.15) \oint_{\mathcal{K}} y^2 dx + (x+y)^2 dy, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 : \mathcal{K}_1 : y = x^2, \mathcal{K}_2 : y = \sqrt{x}.$$

$$(14.16) \oint_{\mathcal{K}} 1 dx + (x-y) dy, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1 : y = 1 - x^2, \mathcal{K}_2 : y = x^2 - 1.$$

$$(14.17) \oint_{\mathcal{K}} y dx - x dy, \quad \mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1 : y = x^2 - 2, \mathcal{K}_2 : y = x - 2.$$

$$(14.18) \oint_{\mathcal{K}} (y - x^2) dx + (x^2 - y) dy, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1 : x = y^2, \mathcal{K}_2 : y = x^2.$$

$$(14.19) \oint_{\mathcal{K}} y^2 dx + 2xy dy, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1 : y = (1-x)^2, \mathcal{K}_2 : y = 1 - x^2.$$

$$(14.20) \oint_{\mathcal{K}} xy^2 dx, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1 : y = 1 - x, \mathcal{K}_2 : y = 1 - x^2.$$

Úloha: _____



Rozhodněte, zda pole $\mathbf{f}$ z příkladů (14.1)–(14.20) je potenciálové. Pokud ano, najděte potenciál ϕ a ověřte výsledek obdržené křivkovým integrálem.

Výsledek úlohy: _____



Vypočtete křivkový integrál II. druhu pro zadanou křivku $\mathcal{K}$.

$$(14.1) \frac{5}{2},$$

$$(14.3) -\frac{14}{15},$$

$$(14.5) 1,$$

$$(14.7) 0,$$

$$(14.9) \frac{14}{3},$$

$$(14.2) 16,$$

$$(14.4) 0,$$

$$(14.6) \frac{5}{2},$$

$$(14.8) \frac{2}{3},$$

$$(14.10) 4\pi^2,$$

Výsledek úlohy: _____



Pomocí Greenovy věty spočtete křivkový integrál II. druhu pro kladně orientovanou křivku $\mathcal{K}$.

$$(14.11) \pi,$$

$$(14.13) 0,$$

$$(14.15) \frac{3}{10},$$

$$(14.17) -\frac{1}{3},$$

$$(14.19) 0,$$

$$(14.12) \frac{8}{3},$$

$$(14.14) 0.$$

$$(14.16) \frac{8}{3},$$

$$(14.18) -\frac{1}{30},$$

$$(14.20) -\frac{1}{12},$$

Výsledek úlohy: _____



Rozhodněte, zda pole $\mathbf{f}$ z příkladů (14.1)–(14.20) je potenciálové. Pokud ano, najděte potenciál ϕ a ověřte výsledky obdržené křivkovým integrálem.

$$(14.2) \quad \phi(x, y) = xy,$$

$$(14.7) \quad \phi(x, y, z) = xyz,$$

$$(14.13) \quad \phi(x, y) = \frac{1}{3}x(x^2 + 3y^2),$$

$$(14.4) \quad \phi(x, y, z) = xyz,$$

$$(14.10) \quad \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 +$$

$$(14.19) \quad \phi(x, y) = xy^2,$$

$$(14.5) \quad \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \quad z^2),$$