VKM – 2019/2020 – verze 5

Vypočítejte vektorový součin $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Zjistěte, jaký úhel vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ svírají.

$$\boldsymbol{u} = [3, -1, 2]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [-1, 2, 3]\,. \tag{1}$$

Spočtěte zadané derivace funkce $f(x, y)$.

$$f(x, y, z) = \cos(x - y)\sin(x + z) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{?}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \mathbf{?}. \tag{2}$$

K funkci $f\,(x, y)$ určete tečnou rovinu τ a normálu n v bodě $\boldsymbol{A}$.

$$f(x, y) = y\ln(x - y), \quad \boldsymbol{A} = [2, 1, ?]\,. \tag{3}$$

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x, y)$.

$$f(x, y) = x^2\, y^2 + \frac{x^2}{2} + y^3 - 3\,y + 3. \tag{4}$$

Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x, y)$ vzhledem k zadané vazební podmínce.

$$f(x, y) = 7 - x - 3y + xy^3 \quad \text{vazba: přímka } x = y. \tag{5}$$

Vypočtěte divergenci a rotaci pole $\boldsymbol{f}$ a rozhodněte, zda je pole zřídlové nebo vírové.

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \left[3x^2, 3y^2, 3z^2\right]. \tag{6}$$

Zintegrujte na oblasti Ω, oblast zakreslete.

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \Omega: \text{ ohraničena } y = x^2 \text{ a } x = y^2. \tag{7}$$

Určete souřadnice těžiště rovinné oblasti Ω s hustotou $\sigma(x, y) = 1$, ohraničené křivkami.

$$y = x^2 + x, \quad y = 2 \tag{8}$$

Vypočtěte křivkový integrál II. druhu pro zadanou křivku $\mathcal{K}$.

$$\int\limits_{\mathcal{K}} y \;\, \mathrm{d}x + x \;\, \mathrm{d}y \qquad \mathcal{K}: \text{ parabola } x = 4 + y^2, \text{ mezi body } \boldsymbol{A} = [4, 0]\,, \ \boldsymbol{B} = [8, 2]\,. \tag{9}$$

Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál II. druhu pro kladně orientovanou křivku $\mathcal{K}$.

$$\oint\limits_{\mathcal{K}} 1 \;\, \mathrm{d}x + (x - y) \;\, \mathrm{d}y\,, \qquad \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2, \ \mathcal{K}_1 : y = 1 - x^2, \ \mathcal{K}_2 : y = x^2 - 1. \tag{10}$$