VKM – 2019/2020 – verze 6

Nalezněte jednotkový vektor kolmý k zadaným vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Spočtěte velikost úhlu, který vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ svírají.

$$\boldsymbol{u} = [3, -1, -3]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [2, 3, 1]\,. \tag{1}$$

Určete a zakreslete definiční obor $f(x,y)$, spočtěte derivaci.

$$f(x,y) = \arcsin\Big(x^2 + y^2 - 3\Big)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\,. \tag{2}$$

K implicitní funkci $z = z(x,y)$ určete tečnou rovinu τ v bodě $\boldsymbol{A}$.

$$\ln(xyz) - x - y - z - 1 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, -1, -1]\,. \tag{3}$$

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x,y)$.

$$f(x,y) = 5x^2 + 2x^3 + y^2 + xy^2. \tag{4}$$

Vypočtěte gradient $u(x,y,z)$ a směrovou derivaci v daném bodě $\boldsymbol{A}$ ve směru $\boldsymbol{b}$.

$$u(x,y,z) = (x + 2y - 3z)^2 + x, \quad \boldsymbol{A} = [2, 0, 1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [3, 0, 4]\,. \tag{5}$$

Vypočtěte divergenci a rotaci pole $\boldsymbol{f}$ a rozhodněte, zda je pole zřídlové nebo vírové.

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \Big[x(y-z)^2, y(z-x)^2, z(x-y)^2\Big]\,. \tag{6}$$

Zintegrujte na oblasti Ω, oblast zakreslete.

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \Omega: \text{ ohraničena } y = x^2,\ y = 5x - 4. \tag{7}$$

Zintegrujte na oblasti Ω, oblast zakreslete. Užijte transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \Omega: 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge 0. \tag{8}$$

Vypočtěte křivkový integrál I. druhu pro zadanou křivku $\mathcal{K}$.

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (x + y)\ \mathrm{d}S, \qquad \mathcal{K}: \text{strany } \Delta\boldsymbol{ABC} \quad \boldsymbol{A} = [0, 1, 0]\,, \boldsymbol{B} = [2, 1, 0]\,, \boldsymbol{C} = [0, 3, 0]\,. \tag{9}$$

Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál II. druhu pro kladně orientovanou křivku $\mathcal{K}$.

$$\oint\limits_{\mathcal{K}} 2y\ \mathrm{d}x - (x + y)\ \mathrm{d}y\,, \qquad \mathcal{K}: \text{ strany } \Delta\boldsymbol{ABC} \text{ vymezeného úsečkami} \tag{10}$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + 2y = 4.$$