VKM – 2019/2020 – verze 7

Nalezněte jednotkový vektor kolmý k zadaným vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Spočtěte velikost úhlu, který vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ svírají.

$$\boldsymbol{u} = [0, -2, 2]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [2, 1, 1]\,. \tag{1}$$

Vypočítejte limitu.

$$\lim_{[x,y]\to[-2,0]} \frac{(x+y)^2 - 4}{x+y+2}. \tag{2}$$

K funkci $f\,(x, y)$ určete tečnou rovinu τ a normálu n v bodě $\boldsymbol{A}$.

$$\begin{aligned} f(x,y) = 3x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 6x + 5y + 10, \\ \boldsymbol{A} = [1, -1, ?]\,. \end{aligned} \tag{3}$$

K implicitní funkci $z = z(x, y)$ určete tečnou rovinu τ v bodě $\boldsymbol{A}$.

$$x + y^2 + z^3 - xyz = 0, \quad \boldsymbol{A} = [-4, 2, 0]\,. \tag{4}$$

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x, y)$.

$$f(x,y) = 5 + 2x + x^2 + 6y - y^2. \tag{5}$$

Vypočtěte gradient $u(x, y, z)$ a směrovou derivaci v daném bodě $\boldsymbol{A}$ ve směru $\boldsymbol{b}$.

$$u(x,y,z) = x^2 - 2xy + \frac{z^2}{y^3}, \quad \boldsymbol{A} = [1, -1, 1]\,, \quad \boldsymbol{b} = [2, -1, 2]\,. \tag{6}$$

Vypočtěte divergenci a rotaci pole $\boldsymbol{f}$ a rozhodněte, zda je pole zřídlové nebo vírové.

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \Big[x(y-z)^2, y(z-x)^2, z(x-y)^2\Big]\,. \tag{7}$$

Zintegrujte na oblasti Ω, oblast zakreslete.

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \Omega: \ \boldsymbol{ABCD} : \boldsymbol{A} = [0,0]\,, \boldsymbol{B} = [1,1]\,, \boldsymbol{C} = [1,3]\,, \boldsymbol{D} = [0,1]\,. \tag{8}$$

Určete souřadnice těžiště rovinné oblasti Ω s hustotou $\sigma(x, y) = 1$, ohraničené křivkami.

$$x = 4, \quad y = 0, \quad y = x^2. \tag{9}$$

Vypočtěte křivkový integrál II. druhu pro zadanou křivku $\mathcal{K}$.

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (y+z)\,\mathrm{d}x + (x+z)\ \mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z, \qquad \mathcal{K}: \ \text{úsečka } \boldsymbol{AB} \qquad \boldsymbol{A} = [2, 0, -2]\,, \boldsymbol{B} = [-1, 0, 1]\,. \tag{10}$$