VKM – 2019/2020 – verze 8

Nalezněte jednotkový vektor kolmý k zadaným vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Spočtěte velikost úhlu, který vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ svírají.

$$\boldsymbol{u} = [0, -2, 2]\,, \qquad \boldsymbol{v} = [2, 0, -1]\,. \tag{1}$$

Spočtěte zadané derivace funkce $f(x, y)$.

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{?}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \mathbf{?}. \tag{2}$$

K funkci $f\,(x, y)$ určete tečnou rovinu τ a normálu n v bodě $\boldsymbol{A}$.

$$f(x, y) = \ln\Big(2 - x^2 + 3\,y\Big)\,, \quad \boldsymbol{A} = [-2, 1, ?]\,. \tag{3}$$

K implicitně zadané funkci $y = y(x)$ určete rovnici tečny t a normály n v bodě $\boldsymbol{A}$.

$$x^2 y + x y^2 = 0, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1]\,. \tag{4}$$

Nalezněte lokální extrémy fce $f(x, y)$.

$$f(x, y) = x^2\, y^2 + \frac{x^2}{2} + y^3 - 3\,y + 3. \tag{5}$$

Vypočtěte gradient $u(x, y, z)$ a směrovou derivaci v daném bodě $\boldsymbol{A}$ ve směru $\boldsymbol{b}$.

$$u(x, y, z) = x^2 + xy + 3x + 2y^2 - 2y + 3z^2 - 6z, \quad \boldsymbol{A} = [1, 1, 1]\,, \quad \boldsymbol{b} = \Big[0, 1, \sqrt{2}\Big]\,. \tag{6}$$

Zintegrujte na oblasti Ω, oblast zakreslete.

$$\iint\limits_{\Omega} (1 - xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \Omega: \text{ ohraničena } x = 0,\ y = 2 \text{ a } y = \sqrt{x}. \tag{7}$$

Určete souřadnice těžiště rovinné oblasti Ω s hustotou $\sigma(x, y) = 1$, ohraničené křivkami.

$$y = x, \quad y = x^2. \tag{8}$$

Vypočtěte křivkový integrál II. druhu pro zadanou křivku $\mathcal{K}$.

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \Big(x^2 - 2xy\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(y^2 - 2xy\Big)\ \mathrm{d}y \qquad \mathcal{K}: \text{ parabola } x = t,\ y = t^2,\ -1 \leq t \leq 1. \tag{9}$$

Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál II. druhu pro kladně orientovanou křivku $\mathcal{K}$.

$$\oint\limits_{\mathcal{K}} (1 - y)\ \mathrm{d}x + (2x - 1)\ \mathrm{d}y\,, \qquad \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2,\ \mathcal{K}_1 : y = (1 - x)^2,\ \mathcal{K}_2 : y = 1 - x^2. \tag{10}$$